CORSO DI RECUPERO PER STUDENTI CON OFA

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria e Architettura

A.A. 2019-2020

Soluzioni ai quesiti di GEOMETRIA ANALITICA

1. Risposta esatta: (d).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:
   Siano $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ due rette tali che il prodotto dei coefficienti angolari sia $m \cdot m' = -1$. Analizziamo le possibili opzioni di scelta.
   Se la (a) fosse corretta, allora almeno uno tra m e m' dovrebbe essere uguale a 1, il coefficiente angolare delle rette parallele a $y = x$. Tuttavia, esistono infinite possibili coppie di numeri (m, m') entrambi diversi da 1 e con prodotto -1, ad esempio $\left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{7}, -\frac{7}{4}\right), \left(3\sqrt{2}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}\right), \ldots$.
   Se la (b) fosse corretta, allora almeno uno tra m e m' dovrebbe essere uguale a 0, coefficiente angolare delle rette parallele a $y = 0$, e quindi, per la legge di annullamento del prodotto[1], anche $m \cdot m'$ dovrebbe essere 0.
   Se la (c) fosse corretta, allora almeno uno tra m e m' dovrebbe essere uguale a $\pm\infty$, coefficiente angolare delle rette parallele a $x = 0$, e quindi il prodotto $m \cdot m'$ non sarebbe definito.
   La risposta corretta è la (d) per quanto visto per le opzioni (b) e (c).

2. Risposta esatta: (c).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:
   Per la legge di annullamento del prodotto[1],
   $$(x^2 + y^2 - 4)(2x - y + 1) = 0 \iff x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ o } 2x - y + 1 = 0,$$
   dove l'equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$ rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 2; mentre $2x - y + 1 = 0$ è l'equazione di una retta. Ricordando che il connettivo "o" corrisponde all'unione insiemistica, si conclude che la risposta esatta è la (c).

[1] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 30.

3. Risposta esatta: (b).
SOLUZIONE DEL QUESITO:
L'equazione generica di una circonferenza[2] si può scrivere nella forma compatta $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$, dove (x_0, y_0) sono le coordinate del centro e R è il raggio. Da qui possiamo dedurre che una circonferenza con centro nell'origine ha equazione $x^2 + y^2 = R^2$, non vi compaiono cioè i termini lineari in x e in y. Ricordando inoltre che nell'equazione di una circonferenza devono coincidere i coefficienti di x^2 e di y^2, si ha che il parametro k deve essere soluzione del sistema
$$\begin{cases} 3k-2=1 \\ 2(1-k)=0 \end{cases}$$
Questo sistema ha come unica soluzione $k = 1$. Per $k = 1$, l'equazione diventa $x^2+y^2-5 = 0$, equivalente a $x^2 + y^2 = 5$, che è appunto l'equazione di una circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt{5}$. Pertanto la risposta esatta al quesito è la (b).

4. Risposta esatta: (a).
SOLUZIONE DEL QUESITO:
Le parabole con asse parallelo all'asse x hanno equazione del tipo $x = ay^2 + by + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, per cui possiamo già escludere le risposte (b) e (c). Riscriviamo le restanti parabole nella forma canonica:
$$\begin{aligned} &(a)\ x = 3y^2 \\ &(d)\ x = 3y^2 + 6y + 3 \end{aligned} \tag{1}$$
e calcoliamo i rispettivi vertici. Ricordando che la formula generica per il calcolo del vertice di una parabola con asse parallelo all'asse x è $V = \left(c - \frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, si ha:
$$\begin{aligned} V_{(a)} &= \left(0 - \frac{0}{12}, -\frac{0}{6},\right) = (0,0), \\ V_{(d)} &= \left(3 - \frac{36}{12}, -\frac{6}{6}\right) = (0,-1). \end{aligned}$$
La parabola (a) ha quindi vertice nell'origine e pertanto (a) è la risposta esatta.

N.B. La risposta (d) si poteva escludere anche per via del fatto che il vertice, essendo un punto della parabola, deve verificarne l'equazione. Sostituendo ad x e y il valore 0

[2] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base*. Pitagora (2003), pag. 60.

nell'equazione (1), otteniamo $0 = 3$, ossia un'equivalenza falsa. La parabola non passa per l'origine e quindi il suo vertice non potrà mai essere $(0, 0)$.

5. Risposta esatta: (c).
6. Risposta esatta: (d).
7. Risposta esatta: (a).
8. Risposta esatta: (a).
9. Risposta esatta: (b). SUGGERIMENTO: Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases}$
10. Risposta esatta: (c).