CORSO DI RECUPERO PER STUDENTI CON OFA

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria e Architettura

A.A. 2019-2020

Soluzioni ai quesiti di ALGEBRA

1. Se $a < 0 < b < c$, allora quale tra le seguenti disuguaglianze è vera?

   (a) $ab < ac$

   (b) $ab \geq ac$

   (c) $ab \leq ac$

   (d) $ab > 0$

   Risposta esatta: (b)
   SOLUZIONE DEL QUESITO:
   Per ipotesi $a < 0$ e $b < c$. Dalla proprietà dei numeri reali

   $$x < y \wedge z < 0 \Rightarrow xz > yz, \tag{1}$$

   segue che la disuguaglianza

   $$ab > ac$$

   è vera. Verifichiamo quindi le risposte caso per caso, sfruttando all'occorrenza l'ultima disuguaglianza:

   (a) Scegliamo i valori $a = -5$, $b = 1$ e $c = 5$ per i parametri e sostituiamoli nella disequazione $ab < ac$:

   $$ab = -5, \quad ac = -25$$

   e questo implica che $ab < ac$ è vera se e solo se $-5 < -25$, ma quest'ultima disuguaglianza è sempre falsa, e pertanto anche la risposta (a) è falsa.

   (b) In generale dati due numeri reali x e y vale l'implicazione

   $$x > y \Rightarrow x \geq y$$

e questo perchè affermare che "$x \geq y$" equivale a "$x > y$ o $x = y$". Sfruttando l'implicazione possiamo quindi scrivere

$$ab > ac \Rightarrow ab \geq ac$$

e quindi la risposta (b) è vera.

(c) Con lo stesso procedimento del punto (a), si assegnano dei valori ai parametri ($a = -5$, $b = 1$ e $c = 5$) con cui si dimostra che la disuguaglianza è falsa.

(d) Dall'ipotesi sappiamo che $a < 0 < b$, ovvero $0 < b \wedge a < 0$, da cui, sfruttando di nuovo la (1), si ha

$$0 \cdot a > b \cdot a \iff 0 > ba \iff 0 > ab.$$

L'ultima disuguaglianza è vera e pertanto $ab > 0$ è falsa (si poteva anche fare subito la verifica assegnando ad esempio i valori $a = -5$, $b = 1$).

2. Il sistema di equazioni $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$

(a) non ha soluzioni.

(b) ha una soluzione positiva.

(c) ha almeno una soluzione negativa.

(d) ha tre soluzioni positive.

Risposta esatta: (b).

SOLUZIONE DEL QUESITO:

Fattorizzando entrambe le equazioni del sistema, si ha

$$\begin{cases} (x-2)(x-1) = 0 \\ (x-3)(x-2) = 0 \end{cases}$$

che, per la legge dell'annullamento del prodotto[1], equivale a

$$\begin{cases} x = 2 \text{ o } x = 1 \\ x = 3 \text{ o } x = 2 \end{cases}$$

[1] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 30.

Quindi l'unica soluzione comune è $x = 2$, che è positiva.

3. Se $x > 0$ allora $\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)^4$ è uguale a

   (a) $x^{(1/2)^4-(1/3)^4}$.

   (b) $x^{1/2-1/3+4}$.

   (c) $x^{2/3}$.

   (d) $x^{1/4}$.

   Risposta esatta: (c)

   SOLUZIONE DEL QUESITO:

   Per $x > 0$, l'uguaglianza $x^a = x^b$ è verificata se e solo se vale l'uguaglianza tra gli esponenti $a = b$. Inoltre vale la proprietà $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$, pertanto

$$\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)^4 = \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^4 = x^{\frac{1}{6}\cdot 4} = x^{\frac{2}{3}}.$$

   Deduciamo quindi che la risposta esatta al quesito è la (c).

4. L'equazione $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

   (a) non ha soluzioni razionali.

   (b) ha tre soluzioni razionali negative.

   (c) ha almeno una soluzione razionale negativa.

   (d) non ha soluzioni reali.

   Risposta esatta: (c).

   SOLUZIONE DEL QUESITO:

   Procedimento 1: Poiché $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$ è un polinomio a coefficienti interi, le sue radici razionali sono da ricercare nell'insieme

$$\left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p \text{ divide } 1,\ q \text{ divide } 4 \right\} = \left\{ \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4} \right\}$$

Eseguendo i calcoli si ottiene

$$P(\pm 1) = 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 1 = 0 \tag{2}$$

$$P\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{16} - 5 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = 0 \tag{3}$$

$$P\left(\pm\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{256} - 5 \cdot \frac{1}{16} + 1 = \frac{1 - 20 + 64}{64} = \frac{45}{64} \neq 0 \tag{4}$$

Quindi le radici sono $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, di cui due razionali negative: $-1, -\frac{1}{2}$. Pertanto la risposta corretta è la (c).

Procedimento 2: Poiché l'equazione è biquadratica, pongo $t = x^2$, cosicché essa risulti equivalente al sistema

$$\begin{cases} t = x^2 \\ 4t^2 - 5t + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = x^2 \\ \left(t - \frac{1}{4}\right)(t-1) = 0 \end{cases}$$

e, per la legge di annullamento del prodotto[1],

$$\iff \begin{cases} t = x^2 \\ t = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} t = x^2 \\ t = 1 \end{cases} \iff x \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\right\}$$

Quindi tra le soluzioni vi sono due razionali negative e pertanto la risposta corretta è la (c).

5. Risposta esatta: (c).
6. Risposta esatta: (d).
7. Risposta esatta: (b).
8. Risposta esatta: (d).
9. Risposta esatta: (a).
10. Risposta esatta: (c).
11. Risposta esatta: (a). SUGGERIMENTO: Se a è radice del polinomio $P(x)$, allora $P(x)$ è divisible per il binomio $(x - a)$ e per il polinomio $Q(x)$ derivante dalla divisione di $P(x)$ per $(x - a)$.