CORSO DI RECUPERO PER STUDENTI CON OFA

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria e Architettura

A.A. 2019-2020

Soluzioni ai quesiti di TRIGONOMETRIA

1. Risposta esatta: (a).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:
   Valutiamo ciascuno dei numeri dati:
   (a) Poiché la funzione $\operatorname{tg}(x)$ è periodica di periodo π, vale che
   $$\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
   e, per la definizione di tangente,
   $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$
   (b) Innanzitutto traduciamo in radianti la misura dell'angolo, usando la proporzione: $2\pi \cdot 180^\circ/360^\circ = \pi$. Dunque
   $$\cos(180^\circ) = \cos(\pi) = -1.$$
   (c) Usando la relazione $\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$, si ha che
   $$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$
   (d) La misura in radianti di -45° è $2\pi\cdot(-45^\circ)/360^\circ = -\pi/4$. Inoltre, poiché la funzione $\cos(x)$ è pari, si ha che
   $$\cos(-45^\circ) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Essendo

$$\sqrt{3} > \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} > -1,$$

la risposta esatta è la (a).

2. Risposta esatta: (a).

   <u>SOLUZIONE DEL QUESITO:</u>

   Poiché l'espressione è il quadrato di un binomio si ha

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) =$$

   che, utilizzando l'identità fondamentale della trigonometria e la formula di duplicazione per il seno[1], è uguale a

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 + \sin\left(2\frac{\pi}{10}\right) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right),$$

   da cui segue che la risposta esatta è la (a).

3. Risposta esatta: (c).

   <u>SOLUZIONE DEL QUESITO:</u>

   Procedimento 1: Poichè il primo membro della disequazione è prodotto di due fattori, questa sarà verificata se entrambi hanno lo stesso segno. In particolare, il fattore $\sin(x)+\sqrt{3}/2$ è positivo (risp. negativo) quando $\sin(x) > -\sqrt{3}/2$ (risp. $\sin(x) < -\sqrt{3}/2$), mentre il fattore $\sin(x) - 1/2$ è positivo (risp. negativo) quando $\sin(x) > 1/2$ (risp. $\sin(x) < 1/2$). Per determinare per quali valori di $\sin(x)$ entrambi i fattori hanno lo stesso segno, osserviamo la Tabella dei segni in Figura 1. La prima riga si riferisce al fattore $\sin(x) + \sqrt{3}/2$ e la seconda a $\sin(x) - 1/2$. I segni "+" e "−" indicano, rispettivamente, la positività e la negatività del fattore nell'intervallo di valori assunti da $\sin(x)$ delimitato dalle linee verticali. Considerando gli intervalli in cui i fattori hanno segno uguale (identificati con il segno "+" in rosso), si ha che la disequazione è verificata per

$$\sin(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin(x) > \frac{1}{2}. \tag{1}$$

[1] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 57.

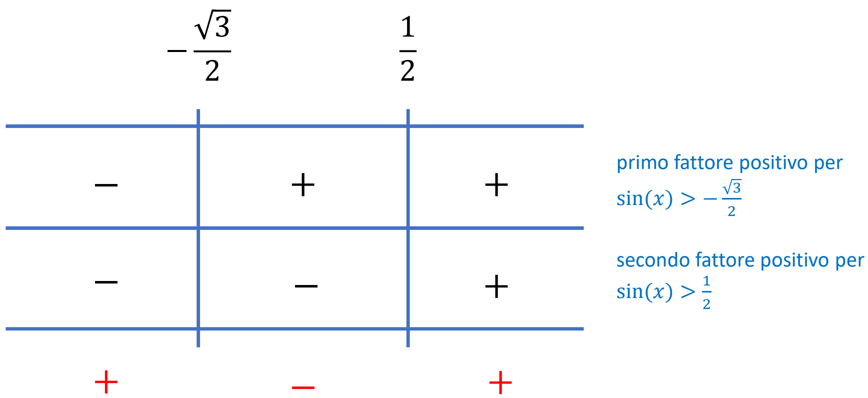

Figura 1: Tabella dei segni per la disequazione del quesito n.3.

I valori di $0 \leq x < 2\pi$ per cui $\sin(x) < -\sqrt{3}/2$ sono $4\pi/3 < x < 5\pi/3$, mentre quelli per cui $\sin(x) > 1/2$ sono $\pi/6 < x < 5\pi/6$. L'insieme delle soluzioni della disequazione si ottiene quindi dall'unione dei due intervalli:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \ \vee \ \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3},$$

da cui segue che la risposta esatta è la (c).

Procedimento 2: Effettuiamo la sostituzione $t = \sin(x)$ nella disequazione, ottenendo così

$$\left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Svolgendo il prodotto, otteniamo la seguente disequazione di secondo grado

$$t^2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4} > 0, \tag{2}$$

avente discriminante

$$\Delta = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4} > 0.$$

In generale, l'insieme delle soluzioni di una disequazione di secondo grado $at^2 + bt + c > 0$ nell'incognita t, con $a > 0$ e $\Delta \geq 0$, è dato da $t < t_1 \ \vee \ t > t_2$, dove t_1 e t_2 ($t_1 \leq t_2$) sono le radici della corrispondente equazione di secondo grado[2].

[2] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 47.

Nel nostro caso le radici dell'equazione

$$t^2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

sono

$$t_1 = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$t_2 = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni della (2) è dato da

$$t < -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \vee \ t > \frac{1}{2},$$

che, per la sostituzione effettuata, equivale a (1). Da qui in poi la risoluzione prosegue come nel Procedimento 1.

4. Risposta esatta: (c).
5. Risposta esatta: (b).
6. Risposta esatta: (d).
7. Risposta esatta: (b).
8. Risposta esatta: (a).
9. Risposta esatta: (d). <u>SUGGERIMENTO</u>: Osservare che $3\pi < 10 < 4\pi$.
10. Risposta esatta: (b).