CORSO DI RECUPERO PER STUDENTI CON OFA

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria e Architettura

A.A. 2019-2020

Soluzioni ai quesiti di DISEQUAZIONI 2

1. Risposta esatta: (b).
   <u>SOLUZIONE DEL QUESITO:</u>
   Per la formula del cambiamento di base dei logaritmi[1], si ha
   $$\beta = \log_9 25 = \frac{\log_3 25}{\log_3 9} = \frac{\log_3 25}{2}.$$
   Inoltre, utilizzando la proprietà dei logaritmi
   $$\log_a(x^y) = y\log_a(x), \quad \forall a > 0, a \neq 1, \forall x > 0, \tag{1}$$
   otteniamo
   $$\beta = \frac{\log_3 25}{2} = \frac{\log_3 5^2}{2} = 2\frac{\log_3 5}{2} = \log_3 5.$$
   Quindi $\alpha = \beta$, che corrisponde alla risposta (b) del quesito.

2. Risposta esatta: (d).
   <u>SOLUZIONE DEL QUESITO:</u>
   Valutiamo una ad una le possibili alternative:
   (a) Poiché $a^{-x} = 1/a^x$, $\forall a > 0$, si ha
   $$3^{-x} - 1 = 0 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = 0 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \iff x = 0.$$

[1] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 87.

(b) Ricordando che la funzione logaritmo è definita in $(0, +\infty)$ e utilizzando la proprietà (1), si ha

$$\log_2(x)+\log_2(x^2) = 3 \iff \begin{cases} \log_2(x) + \log_2(x^2) = 3 \\ x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_2(x) + 2\log_2(x) = 3 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\log_2(x) = 3 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_2(x) = 1 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x = 2.$$

(c) Poichè l'equazione è biquadratica, adoperiamo la sostituzione $t = x^2$:

$$x^4 - x^2 + 1 = 0 \iff t^2 - t + 1 = 0,$$

ottenendo così un'equazione di secondo grado in t con discriminante $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$. Pertanto essa non ammette soluzioni reali.

(d) Osservando che il primo membro è il quadrato di un binomio, si ha

$$(x+1)^2 = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Quindi l'unica equazione ad ammettere soluzione negativa è quella corrispondente all'alternativa (d).

3. Risposta esatta: (b).

SOLUZIONE DEL QUESITO:

Osserviamo innanzitutto che

$$27^2 = (3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6,$$

pertanto la disequazione si può riscrivere come

$$3^{\frac{x^2+4}{x-1}} > 3^6.$$

Ricordiamo che se $a > 1$ la funzione esponenziale a^x è strettamente crescente[2], cioè $a^x > a^y$ se e solo se $x > y$. Nel nostro caso la base a vale $3 > 1$, per cui la disequazione

[2] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 86.

esponenziale è equivalente alla disequazione tra gli esponenti:

$$\frac{x^2+4}{x-1} > 6 \iff \frac{x^2+4}{x-1} - 6 > 0 \iff \frac{x^2+4-6(x-1)}{x-1} > 0 \iff$$

$$\frac{x^2-6x+10}{x-1} > 0. \tag{2}$$

Consideriamo il polinomio di secondo grado $x^2-6x+10$ e calcoliamo il suo discriminante:

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0.$$

Poiché il coefficiente del termine di grado 2 è positivo (in questo caso pari a 1) e il discriminante negativo, il polinomio $x^2-6x+10$ è sempre positivo[3]. Pertanto la frazione a primo membro della (2) è positiva se il denominatore lo è, cioè se $x-1 > 0 \iff x > 1$. La disequazione esponenziale di partenza è quindi risolta per tutti gli $x > 1$, che corrisponde alla risposta (b) al quesito.

4. Risposta esatta: (a).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:
   Utilizzando le proprietà notevoli dei logaritmi[1] possiamo così riscrivere il termine $\log_4\left(\frac{x}{8}\right)$:

$$\log_4\left(\frac{x}{8}\right) = \log_4\left(x \cdot \frac{1}{8}\right) = \log_4(x) + \log_4\left(\frac{1}{8}\right) = \log_4(x) + \log_4\left(8^{-1}\right) = \log_4(x) - \log_4(8).$$

Quindi la disequazione da risolvere diventa $\log_4(x) - \log_4(8) < 0$, che è equivalente a

$$\begin{cases} \log_4(x) < \log_4(8) \\ x > 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che se $a > 1$ la funzione logaritmo $\log_a(x)$ è strettamente crescente[1], cioè $\log_a(x) < \log_a(y)$ se e solo se $0 < x < y$. Nel nostro caso la base a vale $4 > 1$, per cui la disequazione logaritmica ha come insieme di soluzioni

$$0 < x < 8.$$

Quindi le risposte (c) e (d) sono da escludere.
Valutiamo le altre due alternative:

[3] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 47.

(a) Poiché $1 = \log_8(8)$, si ha

$$\log_8(x) < 1 \iff \begin{cases} \log_8(x) < \log_8(8) \\ x > 0 \end{cases} \iff 0 < x < 8.$$

(b) Poiché $0 = \log_4(1)$, si ha

$$\log_4\left(\frac{x^2}{64}\right) < 0 \iff \begin{cases} \log_4\left(\frac{x^2}{64}\right) < \log_4(1) \\ \frac{x^2}{64} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{64} < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$-8 < x < 0 \lor 0 < x < 8.$$

La risposta esatta è pertanto la (a).

5. Risposta esatta: (c).
6. Risposta esatta: (a).
7. Risposta esatta: (c).
8. Risposta esatta: (d).
9. Risposta esatta: (c).
10. Risposta esatta: (a).
11. Risposta esatta: (d).