CORSO DI RECUPERO PER STUDENTI CON OFA

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria e Architettura

A.A. 2019-2020

Soluzioni ai quesiti di DISEQUAZIONI 1

1. Risposta esatta: (a).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:
   L'insieme di soluzioni della disequazione $kx^2 - x - k > 0$ è un intervallo limitato di numeri reali se è del tipo $x_1 < x < x_2$, con x_1, x_2 radici reali e distinte.
   Pertanto, riscriviamo la disequazione nella forma
   $$-kx^2 + x + k < 0,$$
   la quale è verificata per $x_1 < x < x_2$ se, e solo se, sia il coefficiente di x^2 che il discriminante sono positivi[1], cioè
   $$\begin{cases} -k > 0 \\ 1^2 - 4(-k)k > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k < 0 \\ 1 + 4k^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k < 0 \\ \forall k \in \mathbb{R} \end{cases} \iff k < 0.$$
   Quindi la risposta esatta è la (a).

2. Risposta esatta: (c).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:
   Osserviamo che l'insieme delle soluzioni del sistema è dato da
   $$\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^2 \leq 4 \ \wedge \ x^2 - 5x + 6 \geq 0\right\}$$
   che è uguale a
   $$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1 \ \wedge \ x^2 \leq 4 \ \wedge \ x^2 - 5x + 6 \geq 0\right\}.$$

[1] Acerbi E, Buttazzo G. *Matematica preuniversitaria di base.* Pitagora (2003), pag. 47.

Pertanto il sistema dato equivale a un sistema di tre disequazioni

$$\begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 \leq 4 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere quest'ultimo consideriamo le corrispondenti equazioni di secondo grado $x^2 - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$ e $x^2 - 5x + 6 = 0$. Tutte e tre hanno discriminante positivo e quindi una coppia di radici reali e distinte, che sono rispettivamente:

$$x_{1,2}^{eq1} = \frac{0 \mp \sqrt{4}}{2} = \frac{\mp 2}{2} = \mp 1,$$

$$x_{1,2}^{eq2} = \frac{0 \mp \sqrt{16}}{2} = \frac{\mp 4}{2} = \mp 2,$$

$$x_1^{eq3} = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$x_2^{eq3} = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Sapendo che la soluzione di una disequazione di secondo grado equivale al luogo dei punti di positività o negatività di una parabola[1], deduciamo che la disequazione $x^2 - 1 > 0$ ha soluzioni nell'intervallo $(-\infty, x_1^{eq1}) \cup (x_2^{eq1}, \infty) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (se il segno della disequazione fosse stato "$\geq$" allora l'intervallo sarebbe stato $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, cioè con le radici comprese). La seconda disequazione è del tipo $ax^2 + bx + c \leq 0$ con $a > 0$, per cui l'insieme delle soluzioni è dato dall'intervallo $[x_1^{eq2}, x_2^{eq2}] = [-2, 2]$. Con ragionamenti analoghi, si dimostra che l'insieme delle soluzioni della terza disequazione è dato da $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

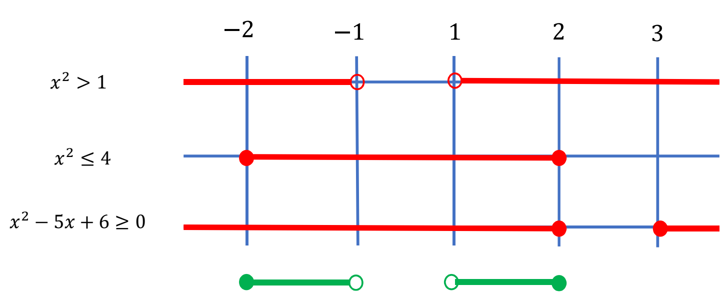

Figura 1: Schema per calcolare l'intervallo delle soluzioni del sistema del quesito n.2.

A questo punto, per risolvere il sistema occorre calcolare l'intersezione degli intervalli trovati. Per farlo, possiamo avvalerci di uno schema come in Figura 1. In esso le linee rosse rappresentano gli intervalli delle soluzioni di ciascuna disequazione del sistema, mentre le linee verdi rappresentano l'intersezione globale di questi intervalli (i "cerchietti pieni" indicano che il corrispondente estremo è incluso nell'intervallo, i "cerchietti vuoti" indicano invece che il corrispondente estremo è escluso). Pertanto, dallo schema deduciamo che l'intersezione degli intervalli $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $[-2, 2]$ e $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ è data da

$$[-2, -1) \cup (1, 2]$$

e pertanto la risposta esatta al quesito è la (c).

3. Risposta esatta: (b).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:

   Prima di tutto riscriviamo la disequazione in modo da avere un'espressione del tipo $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$:

$$\frac{x}{x-2} \leq \frac{x-2}{x} \iff \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x} \leq 0 \iff \frac{x^2-(x-2)^2}{(x-2)x} \leq 0 \iff$$
$$\frac{x^2-x^2-4+4x}{(x-2)x} \leq 0 \iff \frac{-4+4x}{(x-2)x} \leq 0 \iff \frac{-4(1-x)}{(x-2)x} \leq 0 \iff \frac{4(1-x)}{(x-2)x} \geq 0$$

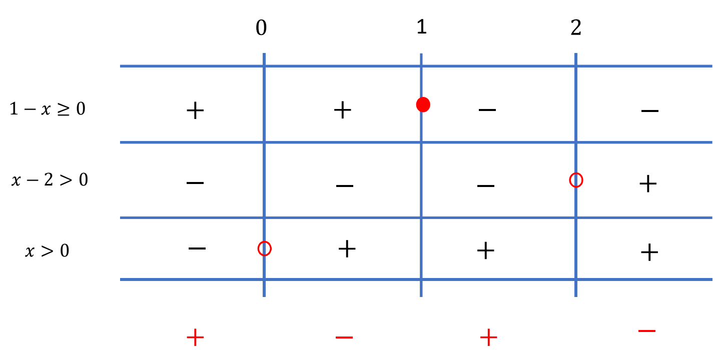

Figura 2: Tabella dei segni per la disequazione fratta del quesito n.3.

Siccome $4 > 0$, per risolvere la disequazione basta considerare solo le soluzioni di

$$\frac{1-x}{(x-2)x} \geq 0.$$

Essendo una disequazione fratta, risolverla è equivalente a cercare gli x reali per cui $(1-x)(x-2)x \geq 0$ e $(x-2)x \neq 0$. Sapendo che $1-x \geq 0$ per $x \leq 1$, $x-2 > 0$ per $x > 2$ e che $(x-2)x \neq 0$ per $x \neq 0, 2$ possiamo avvalerci della Tabella dei segni in Figura 2, dove per ogni fattore del prodotto $(1-x)(x-2)x$ è stato indicato con il simbolo "+" (risp. "$-$") l'intervallo di positività (risp. negatività). I "cerchietti" pieni o vuoti indicano se il numero corrispondente appartiene o meno all'intervallo di positività di ciascun fattore. Dalla Tabella deduciamo che l'insieme di soluzioni della disequazione è dato da

$$x < 0 \ \vee \ 1 \leq x < 2.$$

pertanto la risposta esatta al quesito è la (b).

4. Risposta esatta: (a).
   SOLUZIONE DEL QUESITO:

   La disequazione si può riscrivere come

   $$(x^6-x^2-1)(1+x^2-x^6) \leq 0 \iff -(x^6-x^2-1)(-1-x^2+x^6) \leq 0 \iff (x^6-x^2-1)^2 \geq 0.$$

   Poiché la funzione quadrato non può assumere valori negativi, essa risulta essere sempre verificata.

5. Risposta esatta: (d).
6. Risposta esatta: (b).
7. Risposta esatta: (d).
8. Risposta esatta: (b).
9. Risposta esatta: (a).
10. Risposta esatta: (a).
11. Risposta esatta: (c).