GEOMETRIA ANALITICA

LO SPAZIO IN $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R}^2 = \{(x;y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

DISTANZA FRA DUE PUNTI: $P(x_1;y_1)$ $Q(x_2;y_2) \in \mathbb{R}^2$

$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0;+\infty)$

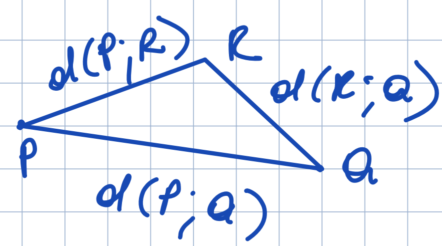
$$d((x_1;y_1),(x_2;y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

1) $d(P,Q) \geq 0 \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^2 \qquad d(P,Q) = 0$ se $P \equiv Q$

2) $d(P,Q) = d(Q,P) \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^2$

3) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(Q,R) \quad \forall P,Q,R \in \mathbb{R}^2$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE



ESERCIZIO: $P(0;0)$ $Q(3;0)$ $R(3;4)$

1) $d(P;Q) = ?$ $d(P;R)?$ $d(Q;R)?$

2) verificare la disuguaglianza triangolare

$d(P;Q) = 3 \qquad d(Q;R) = 4 \qquad d(P;R) = 5$

$3 \leq 4+5$ ✓

$4 \leq 3+5$ ✓

$5 \leq 4+3$ ✓

EQUAZIONE DELLA RETTA: $P(x_1; y_1)$ $Q(x_2; y_2)$

che la retta esiste e sia unica segue dagli assiomi di Euclide.

1° MODO

MODO PARAMETRICO

$\overrightarrow{PQ}\ (x_2-x_1;\ y_2-y_1)$

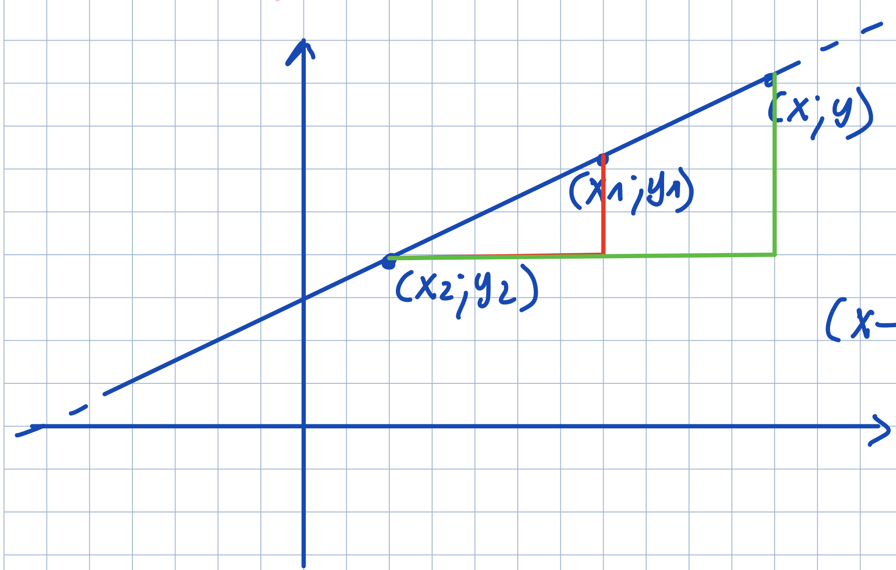
$$r: \begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2-x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2-y_1) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x(t)-x_1}{x_2-x_1} \\ t = \dfrac{y(t)-y_1}{y_2-y_1} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x(t)-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y(t)-y_1}{y_2-y_1}}$$

$x_2 \neq x_1 \ \wedge \ y_2 \neq y_1$

2° MODO



Il triangolo rosso e il triangolo verde sono fra loro simili

$$(x-x_2):(x_1-x_2) = (y-y_2):(y_1-y_2)$$

$$\boxed{\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}}$$

ES: CALCOLARE l'equazione della retta passante per

1) $P(-2; -1)$ $Q(1; -3)$

2) $P(-1; 1)$ $Q(1; -2)$

3) $P(1; -2)$ $Q(2; 2)$

4) $P(-2; 1)$ $Q(2; 1)$ f. parametrica

5) $P(2; 3)$ $Q(2; 5)$ f. parametrica

1)
$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+3}{-1+3}$$
$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{2}$$
$$2(x-1) = -3(y+3)$$
$$2x-2 = -3y-9$$
$$2x+3y+7=0$$
$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

2)
$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y+2}{1+2}$$
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{3}$$
$$3x-3 = -2y-4$$
$$3x+2y+1=0$$
$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

3) $P(1; -2)$ $Q(2; 2)$
$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-2}{-2-2}$$
$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{-4}$$
$$-4x+8 = -y+2$$
$$4x-y-6=0$$
$$y = 4x-6$$

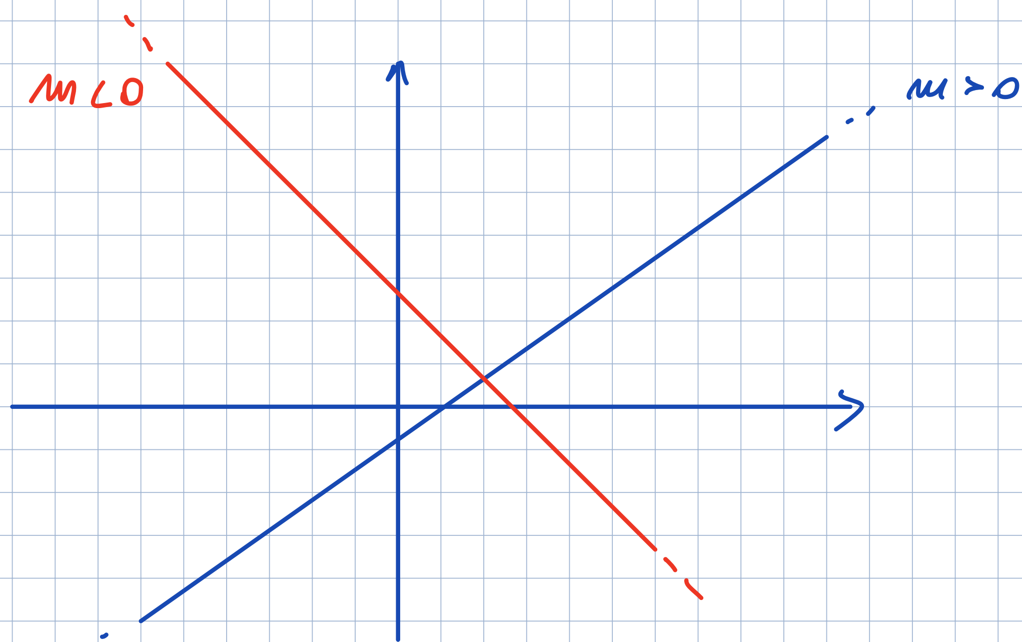
4) $P(-2; 1)$ $Q(2; 1)$
$$\overrightarrow{PQ} = (2-(-2); 1-1)$$
$$(4; 0)$$
$$r: \begin{cases} x = -2 + t \cdot 4 \\ y = 1 + t \cdot 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1 \end{cases}$$

5) $P(2;3)$ $\quad Q(2;5)$

$\overrightarrow{PQ}\ (2-2;\ 5-3) = (0;\ 2)$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 0\cdot t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3+2t \end{cases}$$

m : COEFFICIENTE ANGOLARE $\qquad y = mx+q$



$P(x_1;y_1)$ $\qquad Q(x_2;y_2)$

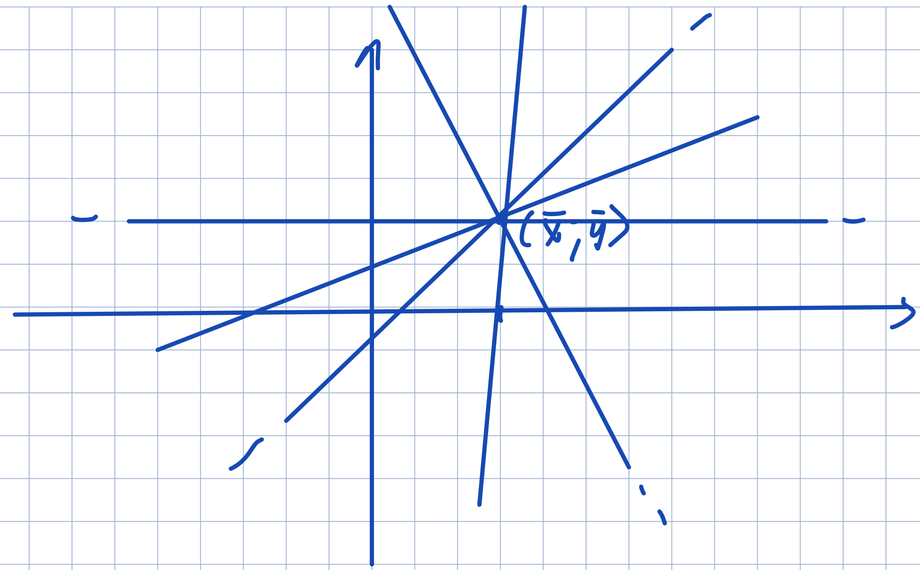
$$\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

es. $\quad y = 5 \qquad m = 0$

$\quad x = -2 \qquad m = \pm\infty$

FASCIO DI RETTE (PROPRIO) PASSANTI PER $(\bar{x};\bar{y})$

$$\boxed{y - \bar{y} = m(x-\bar{x})}$$



ESERCIZIO: Calcolare l'equazione della retta passante per $P(1;2)$ $Q(2;3)$ utilizzando l'eq. del fascio.

$$y-2=m(x-1)$$

$$m=\frac{3-2}{2-1}=1$$

$$y-2=x-1$$

$$y=x+1$$

RETTE PARALLELE: $r: y=mx+q$ $s: y=m'x \cdot q'$

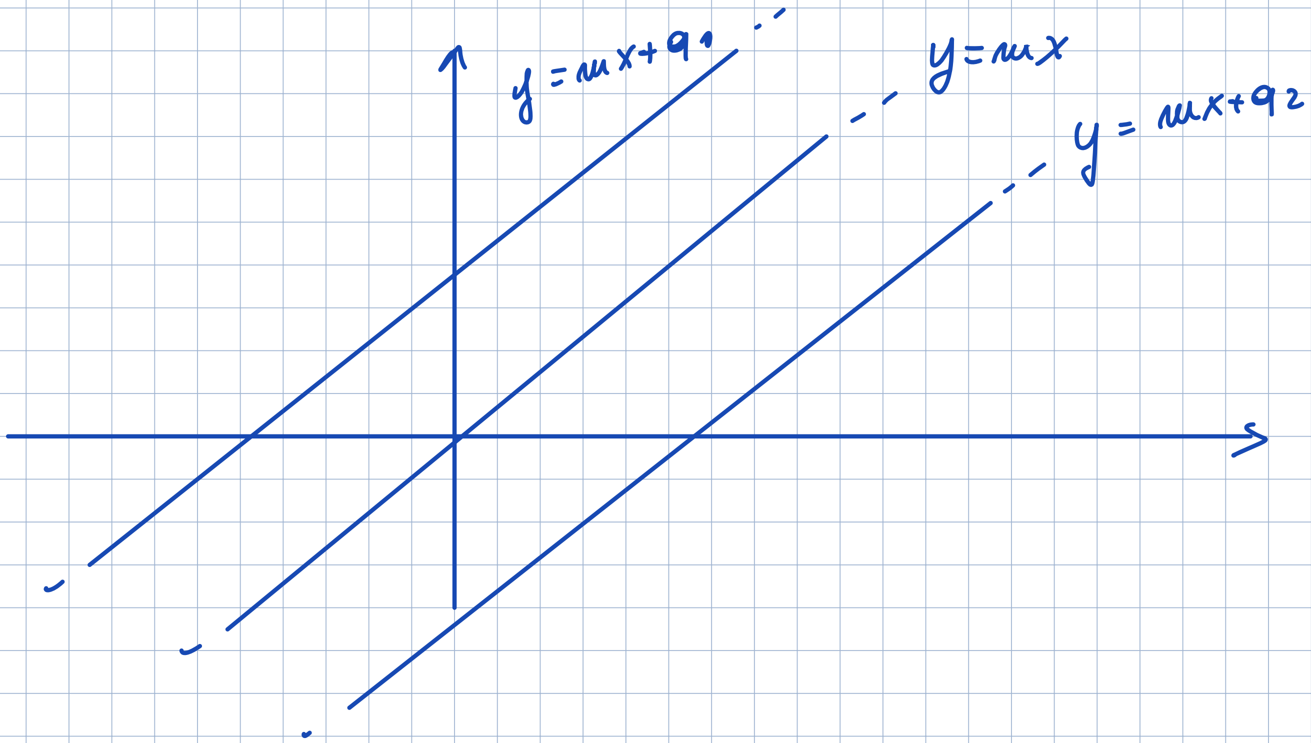
$\boxed{r \parallel s \text{ se } m=m'}$ ovvero se

$$\begin{cases} y=mx+q \\ y=m'x+q' \end{cases} \quad \emptyset \longrightarrow \text{NON ci sono soluzioni}$$

ES. $y=3x-1$ $y=3x+2$ sono parallele

FASCIO (IMPROPRIO) DI RETTE PARALLELE

$$\boxed{y = mx + q}$$



ESERCIZIO: Scrivere l'equazione della retta passante per $(1; 10)$ e $//$ $y = 2x + 5$.

$$y = mx + q$$
$$10 = 2 \cdot 1 + q$$
$$q = 8$$

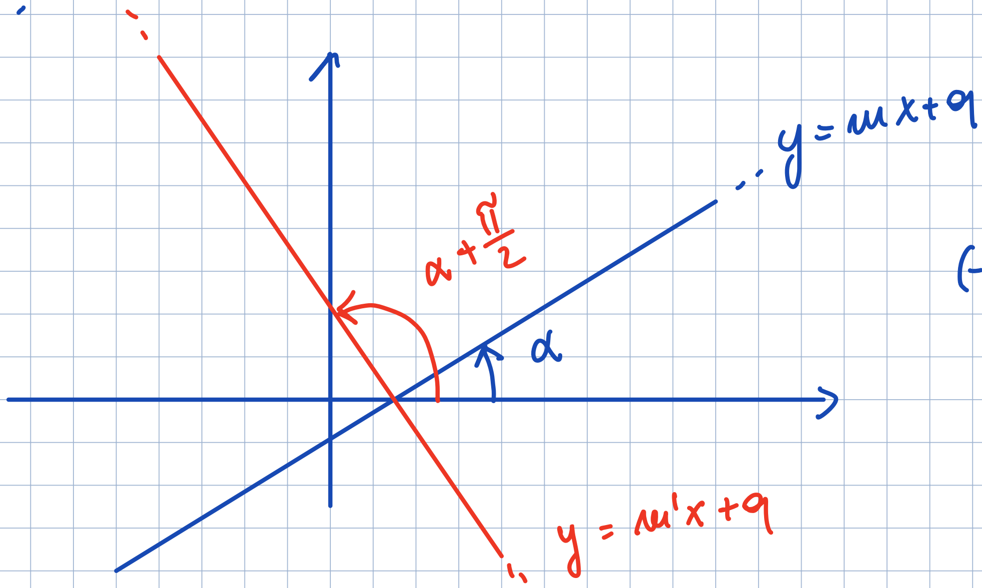
sol: $y = 2x + 8$

RETTE PERPENDICOLARI: $r: \; y = mx + q$

$r': \; y = m'x + q'$

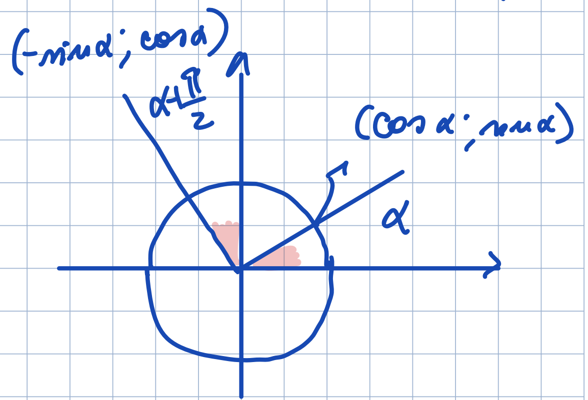
$r \perp r'$ se $m \cdot m' = -1 \longrightarrow m = -\dfrac{1}{m'}$

m : corrisponde alla tangente dell'angolo misurato in senso antiorario che la retta forma con l'asse delle x.



$m = \tan(\alpha)$

$m' = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$



$$m' = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin\alpha} = \frac{-1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{m}$$

c.v.d.

ESERCIZIO: $r: \; y = 2x$ trovare s passante per $P(2;5)$ e perpendicolare a r.

$$y = mx + q$$

$$y = -\frac{1}{2}x + q$$

$$5 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q$$

$$q = 6 \qquad s: \; y = -\frac{1}{2}x + 6$$

OSS: $r: \; ax + by + c = 0$

$s \,//\, r: \; ax + by + c' = 0$ con $c' \neq c$

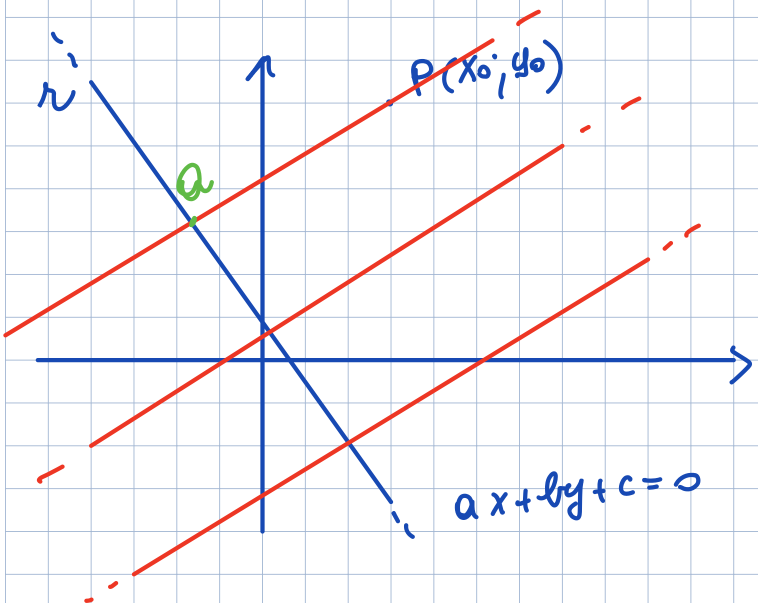
$$t \perp r: \quad -bx + ay + c'' = 0$$
$$bx - ay - c'' = 0$$

Non ho più vincoli su c''.

DISTANZA (MINIMA) DI UN PUNTO DA r:

$$\boxed{d(P;r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

DIM. Sia data $r: ax + by + c = 0$ $\quad P(x_0;y_0)$



Il fascio di rette $\perp$ a r ha equazione $\boxed{bx - ay + q = 0}$.

Imponiamo il passaggio per P: $bx_0 - ay_0 + q = 0$

$$q = ay_0 - bx_0$$

La retta $\perp$ a r passante per P: $bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$

Interseco questa retta con r
$$\boxed{\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} abx + b^2y + bc = 0 \\ abx - a^2y + a^2y_0 - abx_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} * \\ y(a^2+b^2) + bc - a^2y_0 + abx_0 = 0 \end{cases}$$

Ricavo $\bar{y} = \dfrac{a^2y_0 - bc - abx_0}{a^2+b^2}$

Moltiplico questa volta per "a" la prima equazione e per "b" la seconda.

$$\begin{cases} a^2x + aby + ac = 0 \\ b^2x - aby + aby_0 - b^2x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a^2+b^2) + ac + aby_0 - b^2x_0 = 0 \\ * \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2+b^2}$$

$Q(\bar{x};\bar{y})$ è il punto di intersezione fra r e la retta del fascio passante per P.

$$d(P,r) = d(P,Q)$$

$$d^2(P,Q) = \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left\{(\cancel{b^2x_0} - ac - aby_0 - a^2x_0 - \cancel{b^2x_0})^2 + \right.$$

$$\left. + (\cancel{a^2y_0} - bc - abx_0 - \cancel{a^2y_0} - b^2y_0)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left\{a^2(ax_0+by_0+c)^2 + b^2(ax_0+by_0+c)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^{\cancel{2}}}(ax_0+by_0+c)^2\,\cancel{(a^2+b^2)}$$

$$d^2(P;Q) = \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

$$d(P;Q) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c.v.d.

Oss. $d(P;r)$ è la distanza minima.

$Q \in r$ $\quad Q = \left(x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)$

$y = 2x+1$

$(x; 2x+1)$

$$d^2(P;Q) = (x-x_0)^2 + \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} - y_0\right)^2 =$$

$$= (x-x_0)^2 + \frac{1}{b^2}(by_0+ax+c)^2 =$$

$$= x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + \frac{1}{b^2}\left(b^2y_0^2 + a^2x^2 + c^2 + 2by_0ax + 2by_0c + 2axc\right)$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(\underline{b^2x^2} - \underline{b^2 2xx_0} + b^2x_0^2 + b^2y_0^2 + \underline{a^2x^2} + c^2 + \underline{2by_0ax} + 2by_0c + \underline{2axc}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\, d^2(P;Q) = \frac{1}{b^2}\left(2b^2x - 2b^2x_0 + 2a^2x + 2by_0a + 2ac\right) = 0$$

$$x(a^2+b^2) - (b^2x_0 - aby_0 - ac) = 0$$

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}$$

c.v.d.

Minimo della funzione $d^2(P;Q)$

ESERCIZIO: $r:\ y = 3x-5$ $\quad P(1;2)$

$d(P;r) = ?$ $\quad 3x - y - 5 = 0$

$$d(P;r) = \frac{|3\cdot 1 - 2 - 5|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$