LOGICA

PROPOSIZIONE: Una frase di senso compiuto che possa dirsi VERA o FALSA

esempi:

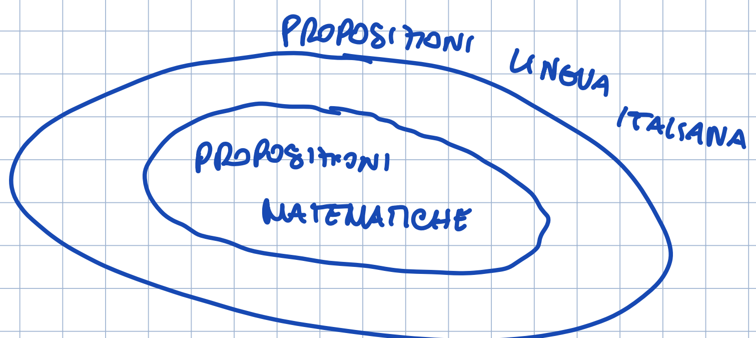
- "Che ore sono?" NON é una proposizione
- "Napoleone vinse a Waterloo" PROPOSIZIONE FALSA
- "3+2 = 5" PROPOSIZIONE VERA

OSS: In una proposizione appare sempre il predicato verbale.

es. "Pioverá?" NON é una proposizione

"Pioverá adesso!" é una proposizione FALSA

Ma la presenza di esso NON ci garantisce che si tratti di una proposizione.



PREDICATO: Una frase all'interno della quale compaiono uno o più parametri, che diventa una proposizione vera o falsa a seconda del valore che assegniamo a questi parametri.

es. $P(x, y) \equiv$ "$x = y$" predicato di uguaglianza

$P(3 \cdot 2, 6)$ è VERA

$P(5, 6)$ è una proposizione FALSA

QUANTIFICATORI

$\exists$ = "ESISTE ALMENO UN" QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

$\forall$ = "QUALSIASI SIA" = "PER OGNI" QUANTIFICATORE UNIVERSALE

OSS: La negazione di $\exists$ è $\forall$ (e viceversa)

"non è vero che $\forall a \in A$, a è pari"

equivale a dire "$\exists \bar{a} \in A$, $\bar{a}$ NON è pari"

OPERATORI LOGICI: "non", "e", "o"

EQUIVALENZA LOGICA: Date due proposizioni a e B le diciamo logicamente equivalenti se hanno lo stesso valore di verità.

TABELLA DI VERITÀ DI "NON"

a	non a
V	F
F	V

OSS:

- "Non" è un operatore unario
- Non $\forall \equiv \exists$ e Non $\exists \equiv \forall$

- Non (Non a) $\equiv$ a

a	non a	non (non a)
V	F	V
F	V	F

es. "Non è vero che $\forall x \in A$, x maggiore di 1"
equivale a Non ($\forall x \in A$, $x > 1$)
equivale a $\exists x \in A$, $x \leq 1$

TABELLA DI VERITÀ DI "E" (et, $\wedge$) (CONGIUNZIONE LOGICA)

a	B	a e B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Oss:

- "e" è un operatore binario
- a e B è VERA se e solo se entrambe le proposizioni sono simultaneamente vere.

TABELLA DI VERITÀ DI "O" ($\vee$) (DISGIUNZIONE LOGICA)

A	B	A o B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Oss: A o B risulta essere falsa se e solo se A e B sono simultaneamente false.

Esercizio: 1) "Fai gli esercizi stasera o domani"

A: "fai gli esercizi stasera"

B: "fai gli esercizi domani"

A	B	A o B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F $\rightarrow$ "Non fai gli esercizi né stasera né domani"

2) "Fai gli esercizi stasera e domani"

A	B	A e B
V	V	V
V	F	F

F	V	F
F	F	F

OSS: Ma questo caso "va bene" solo se fate gli esercizi entrambi i giorni.

TEOREMA:

1. "A e B" $\equiv$ "non [(non A) o (non B)]"
2. "A o B" $\equiv$ "non [(non A) e (non B)]"

DIM.

A	B	A e B	non A	non B
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	V

(non A) o (non B)	non [(non A) o (non B)]
F	V
V	F
V	F
V	F

TABELLA DI VERITÀ DI "$\Rightarrow$" (implica / se ... allora)

a	B	$a \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

"Se vai all'esselunga, compra le mele"

OSS:

- Quando l'antecedente è falso $a \Rightarrow B$ è sempre vera.
- "Se vai all'esselunga allora compra le mele" equivale a "Non vai all'esselunga o compri le mele"

TEOREMA: "$a \Rightarrow B$" $\equiv$ "$\text{non}(a)$ o B"

DIM.

a	B	$a \Rightarrow B$	non a	non(a) o B
V	V	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V

TABELLA DI VERITÀ DI "$\Leftrightarrow$"

(· SE E SOLO SE
· EQUIVALENZA LOGICA)

a	B	$a \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esercizio MODUS PONENS

Provare che $[(a \Rightarrow B) \text{ e } a] \Rightarrow B$ è sempre vera.

Oss: è il sillogismo aristotelico
"Io sono un uomo, ogni uomo è mortale, allora sono mortale".

Dim.

a	B	$a \Rightarrow B$	$(a \Rightarrow B) \text{ e } a$
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	F	F
F	F	V	F

$[(a \Rightarrow B) \text{ e } a] \Rightarrow B$
V
V
V
V

c.v.d.

ES. MODUS TOLLENS: Provare che

"$[(a \Rightarrow B)$ e non$(B)] \Rightarrow$ non a" è un sillogismo

ES. CONTRONOMINALE: Provare che

" $a \Rightarrow B$" è logicamente equivalente $($non $B) \Rightarrow ($non $a)$

ES. Provare che "$a \Leftrightarrow B$" equivale a

"$a \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow a$"

CORREZIONE "$[(a \Rightarrow B)$ e non$(B)] \Rightarrow$ non a"

a	non a	B	non B	$a \Rightarrow B$	$(a \Rightarrow B)$ e non (B)
V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V

$[(a \Rightarrow B)$ e non $B] \Rightarrow$ non a

$$\boxed{\begin{matrix} V \\ V \\ V \\ V \end{matrix}}$$

"$a \Rightarrow B$" è logicamente equivalente $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } a)$

a	B	non a	non B	$\boxed{a \Rightarrow B}$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

non $B \Rightarrow$ non a
V
F
V
V

Provare che "$a \Leftrightarrow B$" equivale a "$a \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow a$"

a	B	$\boxed{a \Leftrightarrow B}$	$a \Rightarrow B$	$B \Rightarrow a$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

$a \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow a$
V
F
F
V

ESERCIZIO: Scrivere in modo equivalente:

"Non è vero che non voglio guardare e voglio comprare"

DIM.

$\mathcal{A}$ = "voglio guardare" $\qquad$ $\mathcal{B}$ = "voglio comprare"

"non ((non $\mathcal{A}$) e $\mathcal{B}$)" $\iff$ "$\mathcal{A}$ o (2) non ($\mathcal{B}$)"

$\iff$ "non $\mathcal{A}$ (3) $\implies$ non $\mathcal{B}$"

ESERCIZIO: "Non (1) è vero che mi piace l'oggetto e non voglio mangiarlo"

DIM: $\mathcal{A}$ = "mi piace l'oggetto" $\qquad$ $\mathcal{B}$ = "voglio mangiare l'oggetto"

non ($\mathcal{A}$ (1) e non ($\mathcal{B}$)) $\iff$ (2) (non $\mathcal{A}$) o $\mathcal{B}$

$\iff$ (3) $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$

ESERCIZIO: Negare la seguente proposizione

"$\forall a > 0,\ \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a > b > 0$" $\longrightarrow$ $\underline{a > b \text{ e } b > 0}$

DIM.

non ($\forall a > 0,\ \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a > b > 0$) $\iff$

$\iff$ $\exists a > 0 : \forall b \in \mathbb{R}\ \ b \geq a$ o $b \leq 0$.

Questa proposizione è palesemente falsa