$\mathbb{N}$: naturali $\qquad \mathbb{N} = \{\underset{\text{MIN}}{0}, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$: relativi / interi $\qquad \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{Q}$: razionali. Sono i numeri della forma $\frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

es. π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e SONO NUMERI IRRAZIONALI

$\mathbb{R}$: reali. $\mathbb{R}$ è un insieme numerico che soddisfa l'assioma di Dedekind (di completezza).

OPERAZIONI DEFINITE SU $\mathbb{Q}$:

$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

ASSOCIATIVA: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

COMMUTATIVA: $x+y = y+x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$

$\exists$ ELEMENTO NEUTRO: $0 \quad x+0 = 0+x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$\exists$ ELEMENTO OPPOSTO: $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists\, y = -x \in \mathbb{Q} : x+y = y+x = 0$

$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

ASSOCIATIVA: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

COMMUTATIVA: $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$

$\exists$ ELEMENTO NEUTRO: $x \cdot 1 = 1 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

$\exists$ ELEMENTO INVERSO: $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad \exists\, y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$x \cdot y = y \cdot x = 1$$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z = z(x+y)$

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

ORDINE TOTALE $\leq$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ vale <u>una e una sola</u> tra le

$\exists!$

seguenti eventualità: $x < y$ o $x = y$ o $x > y$

aut esclusivo

ASSIOMI DI ORDINE TOTALE:

1) $x \leq y$ e $z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + z \leq y + z$

2) $x \leq y$ e $z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

OSS: 0 ELEMENTO ASSORBENTE IN $\mathbb{Q}$:

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

EQUAZIONI IN $\mathbb{Q}$:

Per risolvere le equazioni in $\mathbb{Q}$ sono necessari gli assiomi

① $x + a = b$ se e solo se $x + a + (-a) = b + (-a)$

$x = b - a$

$\forall a, b \in \mathbb{Q}$

se $a \neq 0$

(2) $X \cdot a = b$ se e solo se $X \cdot a \left(\frac{1}{a}\right) = b \cdot \frac{1}{a}$

$$X = \frac{b}{a}$$

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$a \cdot b = 0$ se e solo se $a = 0$ o $b = 0$

equivale a: $a \cdot b \neq 0$ se e solo se $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

PROPRIETÀ DELLE POTENZE:

$$(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha \cdot \beta}$$
$$A^{\alpha} \cdot A^{\beta} = A^{\alpha + \beta}$$
$$A^{\alpha} \cdot B^{\alpha} = (A \cdot B)^{\alpha}$$
$$\forall A, B > 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA:

Dato $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} - \cdots + a_1 \cdot x + a_0$

con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$

t.c. $P(x_i) = 0 \quad i = 1, \ldots, n$

OSS: NON è detto che le radici siano tutte distinte

$P_{100} = (x-1)^{100}$ $\quad x = 1$ con molteplicità algebrica 100.

TEOREMA DI RUFFINI:

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n. Se $P(a) = 0$ allora esiste un polinomio $Q(x)$ di grado $n-1$ t.c.

$P(x) = Q(x)(x-a)$.

ES. $P(x) = x^3 - 8$

$P(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$

$$x^3 - 8 \overset{\text{Teo. Ruff.}}{=} Q(x)(x-2)$$

Per il Teorema di Ruffini $(x-2)$ divide x^3-8.

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & - \quad - & -8 & x-2 \\ \hline -x^3 & +2x^2 & & x^2+2x+4 \\ \hline / & 2x^2 \quad - & -8 & \\ & -2x^2+4x & & \\ \hline & / \quad 4x & -8 & \\ & -4x & +8 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline -6 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$x^3 - 8 = \underbrace{(x^2+2x+4)}_{Q(x)}(x-2)$$

$\Delta = b^2 - 4a = 4 - 16 < 0$

IRRIDUCIBILE

ESERCIZIO: Per quali $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \qquad (*)$$

Dim. $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a+b \neq 0$

sotto queste ipotesi $(*)$ equivale a

$$\frac{b+a}{a \cdot b} = \frac{1}{a+b}$$

moltiplicando entrambi i membri per $a \cdot b(a+b)$

$$a \cdot b(a+b) \quad \frac{b+a}{a \cdot b} = \frac{1}{a+b} \quad a \cdot b(a+b)$$

$$(a+b)^2 = ab$$

$$a^2+b^2+2ab = ab$$

$$a^2+b^2+ab = 0$$

Dividiamo tutto per b^2

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} + \frac{ab}{b^2} = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1 = 0$$

$x = \frac{a}{b}$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1-4 < 0$$

$$\downarrow$$

$\nexists\ a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

c.v.d.

ESERCIZIO: Dire quali fra le seguenti operazioni sono corrette:

1) $\dfrac{x}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}x$ FALSA

$x = \frac{3}{2}x$

2) $\dfrac{2+x}{2y} = \dfrac{1+x}{y}$ FALSA

$\dfrac{2}{2y} + \dfrac{x}{2y} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{2y}$

3) $\dfrac{\sqrt{3(1+a^2)}}{3} = \sqrt{1+a^2}$ FALSA

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(1+a^2)}$

4) $\dfrac{x}{x} = 1$ VERA $\forall x \neq 0$

ESERCIZIO: Semplificare l'espressione:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b-c}} \cdot \left(2 + \frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right) + \frac{(a+b)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{b-c+a}{a(b-c)}}{\frac{b-c-a}{a(b-c)}} \cdot \left(\frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{bc}\right) + \frac{(a+b)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b-c+a}{b-c-a} \cdot \frac{2bc+a^2-b^2-c^2}{bc} + \frac{a^2+b^2+2ab}{2bc} =$$

$$= \frac{2b^2c + a^2b - b^3 - c^2b - 2bc^2 - a^2c + b^2c + c^3 + 2abc + a^3 - ab^2 - ac^2}{2(b-c-a) \cdot bc} +$$

$$+ \frac{a^2+b^2+2ab}{2bc} =$$

$$\frac{3b^2c - 3bc^2 + a^2b - b^3 - a^2c + c^3 + 2abc + a^3 - ab^2 - ac^2}{2(b-c-a) \cdot bc} + \frac{a^2+b^2+2ab}{2bc} =$$

$$\frac{3b^2c - 3bc^2 + a^2b - b^3 - a^2c + c^3 + 2abc + a^3 - ab^2 - ac^2 + (a^2+b^2+2ab)(b-c-a)}{2(b-c-a)(bc)}$$

$$= \frac{3b^2c - 3bc^2 + a^2b \cancel{-b^3} - a^2c + c^3 \cancel{+2abc} \cancel{+a^3} - ab^2 - ac^2 + a^2b - ca^2 \cancel{-a^3} \cancel{+b^3} - cb^2 - ab^2 + 2ab^2 \cancel{-2abc} - 2a^2b}{2(b-c-a)\, bc}$$

$$= \frac{2b^2c - 3bc^2 - 2a^2c + c^3 - ac^2}{2(b-c-a)\cdot bc} = \frac{\cancel{c}(2b^2 - 3bc - 2a^2 + c^2 - ac)}{2(b-c-a)\cdot b\cdot\cancel{c}}$$

ESERCIZIO:

a) $(a+1)\cdot x - 7a = 2a - 3x$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

c) $x^2 - 5x + 7 = 1$

d) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$

a)
$$ax + x + 3x = 2a + 7a$$
$$ax + 4x = 9a$$
$$x(a+4) = 9a$$

DISCUSSIONE: Se $a + 4 = 0 \rightarrow a = -4$

$$x \cdot 0 = -36$$
$$0 = -36 \quad \text{INPOSSIBILE}$$

Se $a + 4 \neq 0 \rightarrow a \neq -4$ $\quad x = \dfrac{9a}{a+4}$

b)
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

ALTERNATIVAMENTE: $S = -1 = -3 + 2$

$P = -6 = -3(2)$

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$
$$x = 3 \quad \vee \quad x = -2$$

c) $x^2 - 5x + 7 = 1 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ $(x-3)(x-2)=0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

d) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$ $x^3 = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$ $t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$x^3 = 2 \qquad x = \sqrt[3]{2}$

$x^3 = 1 \qquad x = 1$