

$$\underline{\text{ES.}} \quad \frac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)} = 0$$

$$\text{C.E.} \\ x \neq 0, \quad x \neq \pm 2, \\ x \neq \pm 1$$

$$(2x^2+4)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2+4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 = -4 \Leftrightarrow x^2 = -2 \quad \text{IMPOSSIBLE}$$

$$\underline{\text{PROP 1}} \quad x \leq y, z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$$

$$\text{Dim.} \quad x \leq y, -z > 0 \stackrel{\text{(ii) ASS ORDINE}}{\Rightarrow} x \cdot (-z) \leq y \cdot (-z) \Rightarrow \\ \Rightarrow -xz \leq -yz \stackrel{\text{(i)}}{\Rightarrow} xz \geq yz$$

$$\text{(ii) ASS ORDINE: } x \leq y, z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

$$\text{(i) } x \leq y, z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+z \leq y+z$$

$$\underline{\text{PROP 2}} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq c \cdot b \quad a, b, c, d > 0$$

$$\text{Dim.} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow 0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{cb - ad}{db} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{cb - ad}{db}$$

$$\begin{matrix} db > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} 0 \leq cb - ad \Leftrightarrow ad \leq c \cdot b \quad \square$$

Es. 1)  $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$       2)  $-\frac{1}{5} < -1$

3)  $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{4}$

4)  $\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \geq 1$

1)  $\frac{2}{3} < \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{Prop 2}} 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 < 9$  VERA

2)  $-\frac{1}{5} < -1 \xrightarrow{\text{Prop 1}} -\frac{1}{5}(-1) > (-1)(-1) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{5} > 1 \xrightarrow{\text{Prop 2}} 1 \cdot 1 > 1 \cdot 5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 1 > 5$  FALSA

3)  $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$  VERA.

4)  $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{5}{6}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{6}{5} \geq 1$  VERA.

Es. SE  $a < 0 < b < c$ , DIRE QUALI DELLE  
SEGUENTI SONO VERE:

1)  $ab < ac$       2)  $ab \geq ac$

3)  $ab \leq ac$       4)  $ab > 0$

1)  $b < c \xrightarrow{a < 0} a \cdot b > a \cdot c$  FALSA

$$2) \quad ab > ec \Rightarrow ab \geq ac \quad \text{VERA.}$$

$$3) \quad ab \leq ac \quad \text{FALSA}$$

$$4) \quad ab > 0$$

$$0 = a \cdot 0 > a \cdot b \Rightarrow ab < 0 \quad \text{FALSA}$$

Es. DIM CHE SE  $a \leq b$  e  $c \leq d$ ,

$$\text{ALLORA } a+c \leq b+d$$

Es. SE  $a \leq b$ ,  $c \leq d \stackrel{?}{\Rightarrow} ac \leq bd$ .

## Sistemi lineari

UN SISTEMA LINEARE NELLE VARIABILI  $x, y$

$$(*) \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

HA COME SOLUZIONE (SE ESISTE) LE COPPIE  $(x, y)$  CHE SONO SOL. DI ENTRAMBE LE EQUAZIONI SIMULTANEAMENTE,

CIOE'  $(x, y)$  SODDISFA  $(*)$  SE E SOLO SE

$(x, y) \in A \cap B$ , DOVE

$$A = \{ (x, y) : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \}$$

$$B = \{ (x, y) : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \}.$$

GEOMETRICAMENTE,  $A$  e  $B$  RAPPRESENTANO DUE RETTE. POSSONO ESSERE:

- 1) TRA LORO PARALLELE, CIOE'  $A \cap B = \emptyset$
- 2) TRA LORO INCIDENTI,  $A \cap B = \{ (x, y) \}$  1 SOL.
- 3) TRA LORO COINCIDENTI,  $A \cap B \equiv A \equiv B$ .  
 $\infty$  SOL.

# METODI DI RISOLUZIONE:

1) SOSTITUZIONE

2) RIDUZIONE

Esercizio

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

ANALITICAMENTE  
e  
GRAFICAMENTE

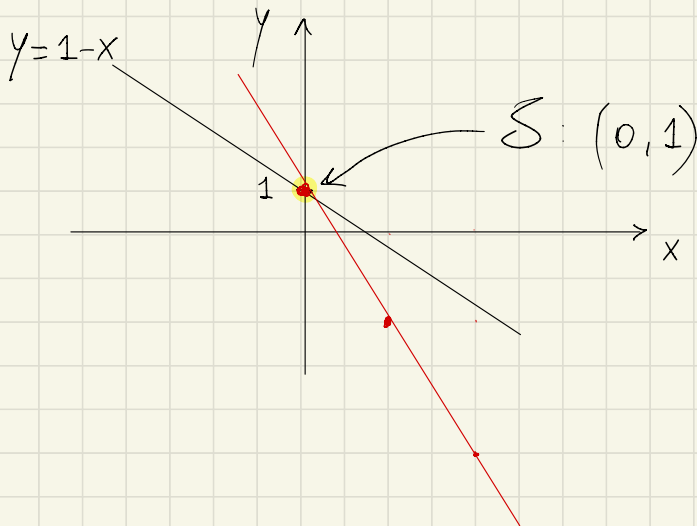
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 3x + 2(1 - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x + \cancel{2} - 2x = \cancel{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1 - x$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

| x | y  |
|---|----|
| 0 | 1  |
| 2 | -2 |
| 4 | -5 |



Es.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x & \textcircled{1} \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3} & \textcircled{2} \\ y = 1 - x & \textcircled{3} \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

$$-2x = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2}: 2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}(-1) - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{8}{3} \quad \text{FALSO}$$

Es.

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y = 1 - ax \\ y = -\frac{2}{a}x + \frac{2}{a} \end{cases} \quad a \neq 0.$$

- SE  $-\frac{2}{a} = -a$  IL SISTEMA È IMPOSSIBILE POICHÉ LE DUE RETTE SONO PARALLELE e DISTINTE.

$$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

- SE  $a \neq \pm\sqrt{2}$ , IL SISTEMA HA UNA SOLA SOLUZIONE, CHE È DATA DA:

$$1 - ax = -\frac{2}{a}x + \frac{2}{a} \Leftrightarrow x = \frac{-a}{a^2 - 2}$$

$$y = 1 - ax = 1 + \frac{a^2}{a^2 - 2}$$

Es.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x - z \\ x + 2(-x - z) = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} * \\ x = -1 - 2z \\ * \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} * \\ * \\ 2(-1 - 2z) + z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/3 \\ x = 5/3 \\ z = -4/3 \end{cases}$$

✓ **Esercizio 2.14** : risolvete i seguenti sistemi lineari:

a) 
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + z = 2. \end{cases}$$

→ **Esercizio 2.6** : risolvete i seguenti sistemi di equazioni:

a) 
$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} (x^2 + 4x - 5)(x^2 - 3ax + 2a^2) = 0 \\ x^2 - 2ax = x - 2a \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \\ x^4 - 5x^2 + 6 = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 2.15** : disegnate nel piano cartesiano l'insieme soluzione di ciascuna riga del sistema, quindi risolvete il sistema, nei casi seguenti:

a) 
$$\begin{cases} |x| \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ y \geq x + 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + y \geq 2 - 2x \\ x \leq y + 1 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x > 1 \\ x - y < 0 \\ y < 1 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} y < |x| \\ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 8. \end{cases}$$



## Es. 2.6

$$a) \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \text{FALSO} \end{cases} \quad \text{IMPOS.}$$

$$b) \begin{cases} (x^2+4x-5)(x^2-3ax+2a^2)=0 & \textcircled{1} \\ x^2-2ax=x-2a & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x^2+4x-5=0 \quad \vee \quad x^2-3ax+2a^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=-5 \vee x=1 \quad \vee \quad x=2a \quad \vee \quad x=a$$

$$\textcircled{2} \quad (x-2a)x = x-2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2a)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=2a \vee x=1.$$

DUNQUE IL SISTEMA È SODDISFATTO

$$\text{DA } \left\{ x=2a, a \in \mathbb{R} \right\}. \leftarrow a = \frac{1}{2}$$

$$c) \begin{cases} (x-2)(x-1)=0 \\ (x-3)(x-2)=0 \end{cases} \quad x=2.$$

$$d) \begin{cases} (x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0 \\ (x^2 - 3)(x^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - 1)(x + 1) = 0 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{2}$$