9/9/22

Grafici di funzione - parte 1

DEF. UNA RELAZIONE È UNA LEGGE CHE PERMETTE DI ASSOCIARE AD ALCUNI (O A TUTTI) GLI ELEMENTI DI UN INSIEME DI PARTENZA A AD UNO O PIÙ EL. DI UN INSIEME DI ARRIVO B.

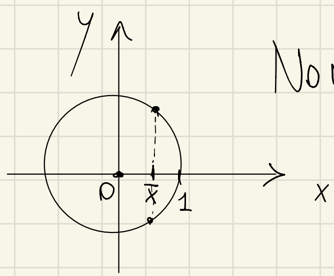
DEF. UNA RELAZIONE TRA DUE INSIEMI A e B È UNA FUNZIONE SE AD OGNI EL. DI A ASSOCIA UNO E UN SOLO EL. DI B, CIOÈ

$$\forall x \in A \quad \exists!\, y \in B \; : \; f(x) = y.$$

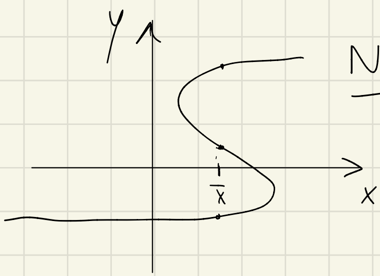
SI SCRIVE

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

ES.



NON È UNA FUNZIONE !!



NO

SI

DEF. GRAFICO DI $f: A \to B$:

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

ES. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ NON E' GRAFICO DI NESSUNA FUNZIONE, INFATTI

$$A = \{(x,y) : y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]\} \cup \{(x,y) : y = -\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]\} =$$

$$= \{(x, \sqrt{1-x^2}), x \in [-1,1]\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]\}.$$

SE SCELGO $\bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \quad y_1 = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

TC $x^2+y^2 = 1$.

DEF. DOMINIO MASSIMALE (O CAMPO DI ESISTENZA) DI UNA FUNZIONE REALE: $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$.

OSS. ↓ E' L'INSIEME DOVE "HA SENSO" $f(x)$.

DEF. $f: A \to B$ DEBOLMENTE CRESCENTE SE

$$\forall x, y \in A \quad x < y \implies f(x) \le f(y).$$

$f: A \to B$ STRETTAMENTE CRESCENTE SE

$$\forall x, y \in A \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

$f: A \to B$ DEBOLMENTE DECRESCENTE SE

$$\forall x, y \in A \quad x < y \implies f(x) \ge f(y).$$

$f: A \to B$ STRETT. DECRESCENTE SE

$$\forall x, y \in A \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

ES. $f(x) = x^2$ STRETT. DECRESCENTE SU $]-\infty, 0]$, CIOE' CHE $\forall x, y \quad x<y$

$$f(x) > f(y) \quad \big(f(y) - f(x) < 0 \big).$$

DIM. $f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = \underbrace{(y-x)}_{>0} \cdot \underbrace{(y+x)}_{<0} < 0.$

$x < y,\ y \le 0 \implies y - x > 0$ E

$$x + y < y + y = 2y \le 0$$

∎

Es. $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ $f(x)$ È DEF. A TRATTI.

È DEBOLMENTE CRESCENTE $\forall x \in \mathbb{R}$.

DIM. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$, CIOÈ

$$f(x) - f(y) \le 0.$$

3 CASI:

1) $x < y \le 0$ 2) $x \le 0 < y$ 3) $0 < x < y$

1) $f(x) - f(y) = 1 - x^2 - (1 - y^2) = \cancel{1} - x^2 - \cancel{1} + y^2 =$

$= y^2 - x^2 = \underbrace{(y-x)}_{>0}\underbrace{(y+x)}_{<0} < 0$

$x < y \Rightarrow y - x > 0$

$x < y \Rightarrow x + y < y + y = 2y \le 0$

2) $f(x) - f(y) = \cancel{1} - x^2 - \cancel{1} = -x^2 \le 0$

3) $f(x) - f(y) = 1 - 1 = 0 \le 0$. ∎

DEF. $f: A \to B$ FUNZIONE INIETTIVA SE OGNI ELEMENTO DI B È IMMAGINE DI $\underbrace{\text{AL PIÙ}}_{\text{1 O NESSUNO}}$ UN EL. DI A, CIOÈ

SE $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

DEF. $f: A \to B$ SURIETTIVA SE OGNI ELEMENTO DI B È IMMAGINE DI ALMENO UN EL. DI A, CIOÈ SE (ALMENO: 1 o PIÙ)

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y.$$

DEF. $f: A \to B$ BIIETTIVA SE È INIETTIVA E SURIETTIVA.

TEOREMA

$f: A \to B$ STRETT. CRESCENTE (DECRESCENTE) $\Rightarrow$ f È INIETTIVA.

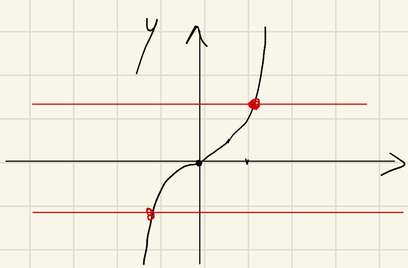
DIM. $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

DEVO DIM CHE, PRESI x, y DISTINTI, ALLORA $f(x) \neq f(y)$.

- SE $x < y \overset{ip}{\Rightarrow} f(x) < f(y)$.
- SE $x > y \overset{ip}{\Rightarrow} f(x) > f(y)$

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

ES.

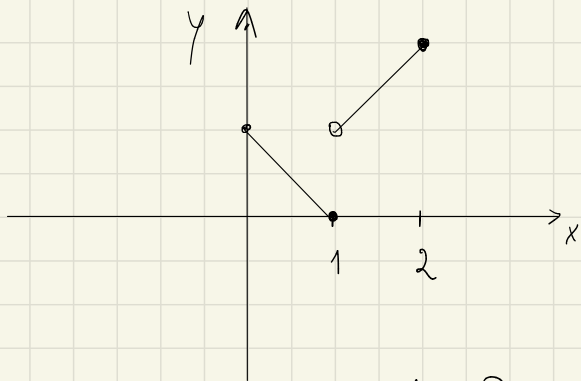


$y = x^3$

OSS. IL TEOREMA È UNA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE, CIOÈ VALE SOLO ($\Rightarrow$).

INFATTI

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ x & 1 < x \le 2 \end{cases}$$



È INIETTIVA MA NON È NÈ STRETT. CRESC. NÈ STRETT. DECRESC.

DEF. DATO UN INSIEME $A \subseteq \mathbb{R}$, SI DEFINISCE

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}.$$

ES. $A = [1, 3[$ $\qquad -A =]-3, -1]$.

SE $A = -A$, ALLORA A SI DICE SIMMETRICO.

ES. $A = (-3, 3)$.

DEF. $f : A \to B$, CON $A : A = -A$, SI DICE PARI SE

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A.$$

ES. $f(x) = x^2 \qquad f : (-a, a) \to \mathbb{R} \qquad a \in \mathbb{R}$

Oss. f PARI È SIMMETRICA RISP. ASSE y.

DEF. $f: A \to B$, CON A: $A = -A$, SI DICE <u>DISPARI</u> SE

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A$$

Es. $f(x) = x^3$

Oss. f DISPARI È SIMMETRICA RISP. ALL'O.

Oss. $f: A \to \mathbb{R}$, $A = -A$, $0 \in A$, f DISPARI

$$\Rightarrow f(0) = 0.$$

DEF. $f: A \to \mathbb{R}$ SI DICE PERIODICA DI PERIODO T $(T > 0)$ SE

1) $\forall x \quad x \in A \Leftrightarrow x + T \in A$ (CONDIZIONE SUL DOMINIO)

2) $\forall x \quad f(x+T) = f(x)$ (CONDIZIONE SULLA FUNZIONE)

Es. $f(x) = \sin x \to T = 2\pi$ $\qquad f(x) = \cos x \to T = 2\pi$ $\qquad f(x) = \tan x \to T = \pi$.

Es. $f(x) = \text{sen}(3x)$ È PERIODICA?

SE SÌ, $T = ?$

$$f(x) = f(x+T) \quad \forall x \quad ?$$

$$f(x+T) = \text{sen}\left(3(x+T)\right) = \text{sen}\left(3x+3T\right) =$$

$$= \text{sen}(3x)\cos(3T) + \text{sen}(3T)\cos(3x)$$

$$f(x) = f(x+T) \iff$$

$$\iff \text{sen}(3x) = \text{sen}(3x)\cos(3T) + \text{sen}(3T)\cos(3x)$$

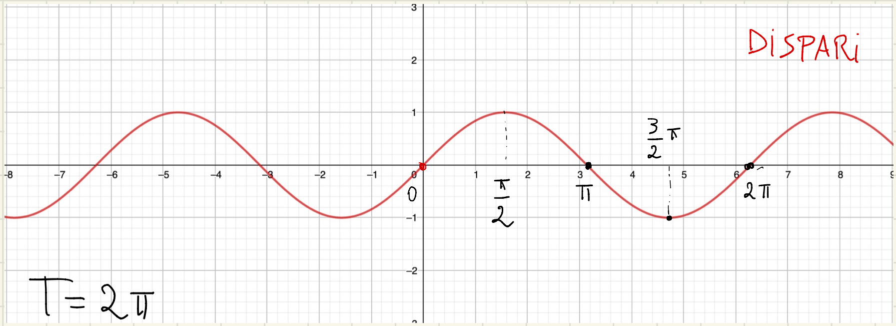
$$\iff \text{sen}(3x)\left(\underline{\cos(3T) - 1}\right) + \underline{\text{sen}(3T)}\cos(3x) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \cos(3T) - 1 = 0 \\ \text{sen}(3T) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(3T) = 1 \\ \text{sen}(3T) = 0 \end{cases}$$

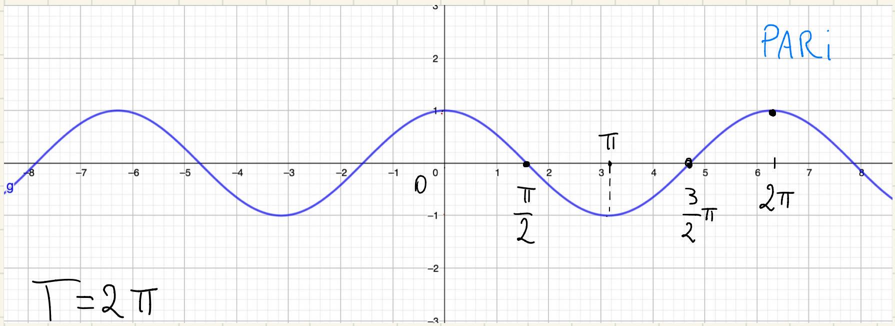
$$\iff 3T = 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$\iff T = \frac{2}{3}\pi K, \quad K \in \mathbb{Z}$$

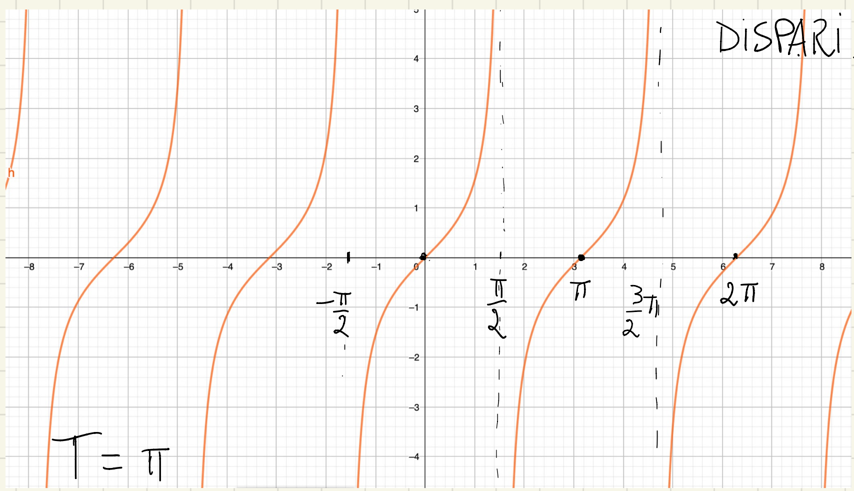
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$

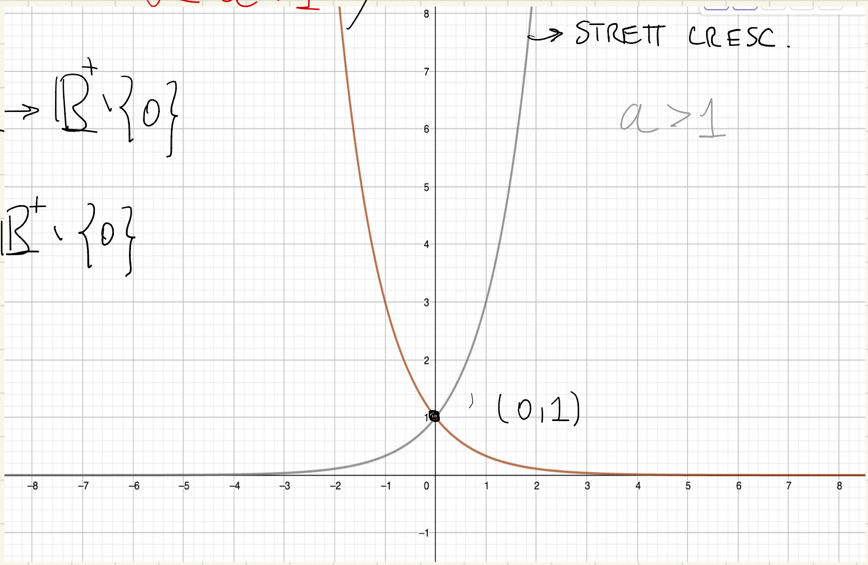


STRETT. DECRESC.

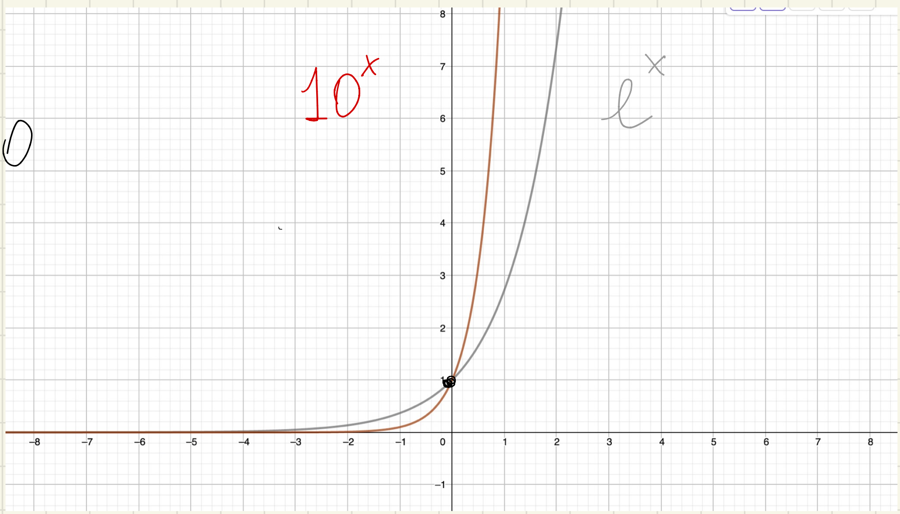
$0 < a < 1$

$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

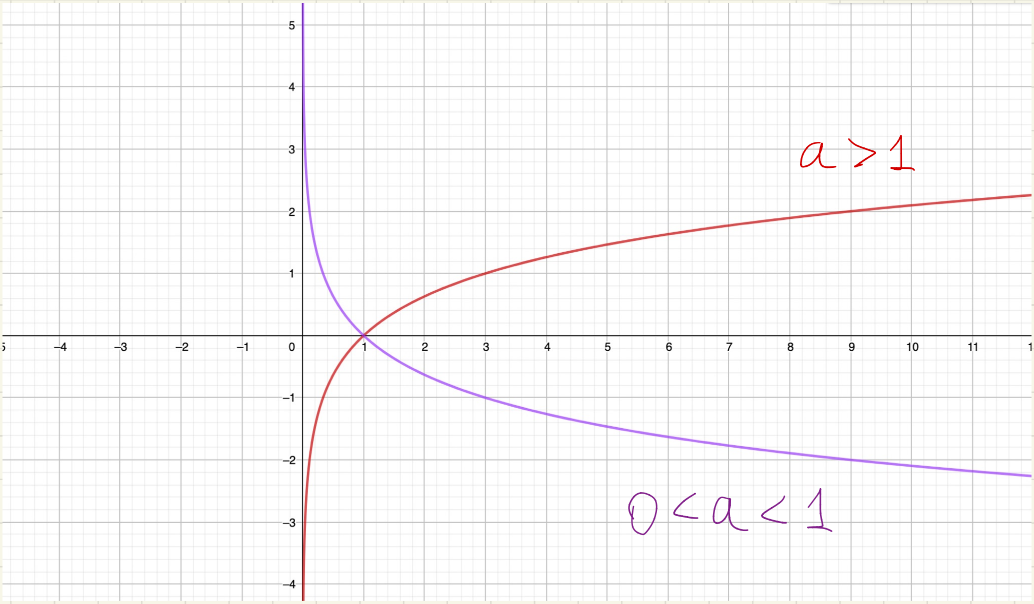
$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$



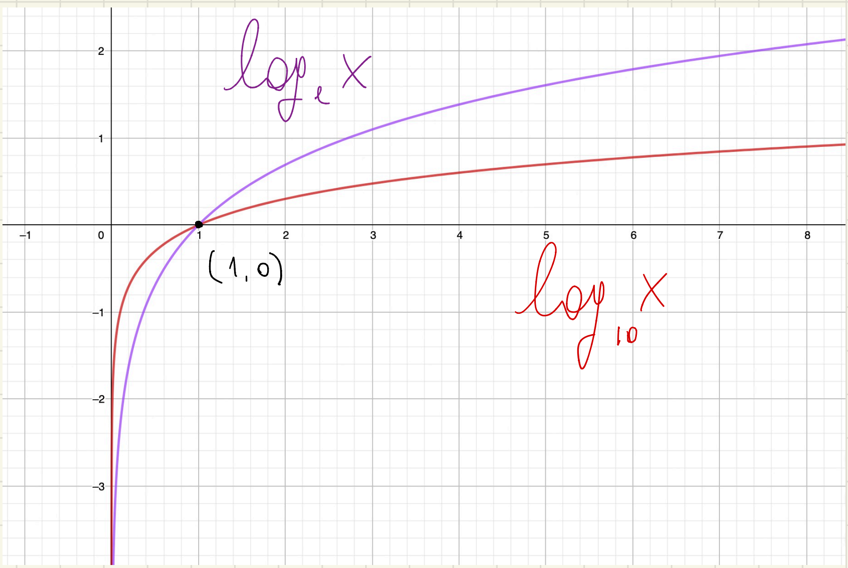
$10 > e > 0$



$\log_a x : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$



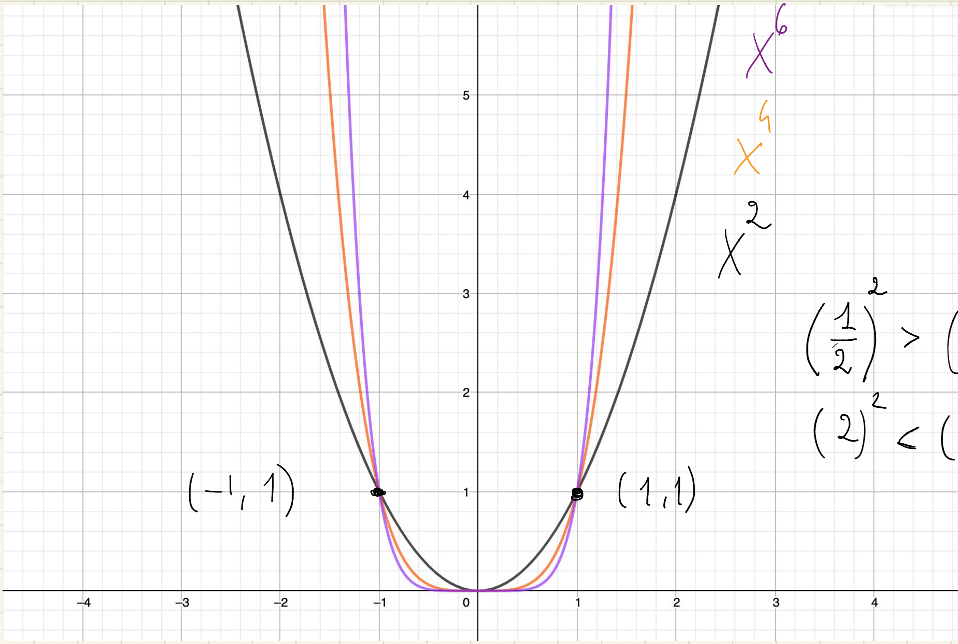
$10 > e > 0$



POLINOMI : $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$

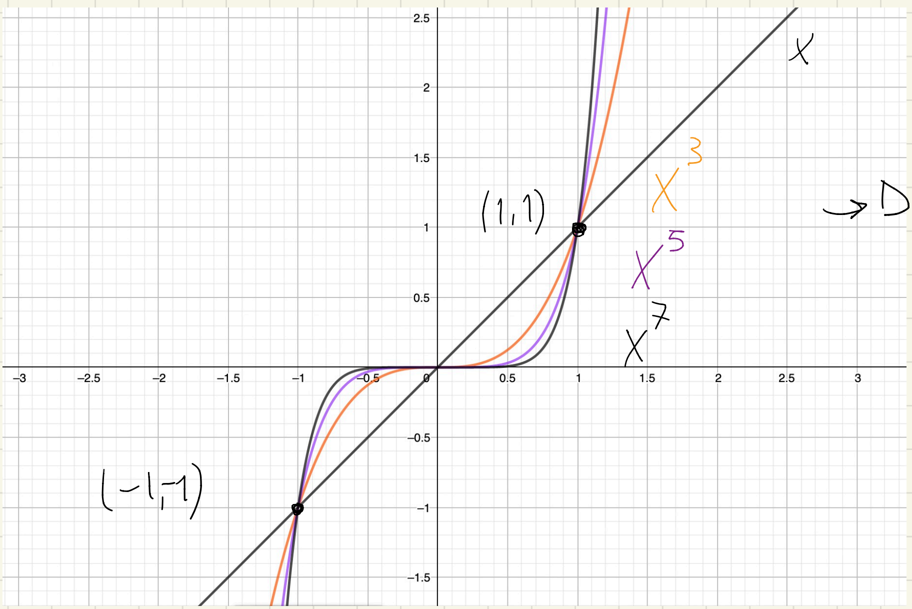
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

→ PARI



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

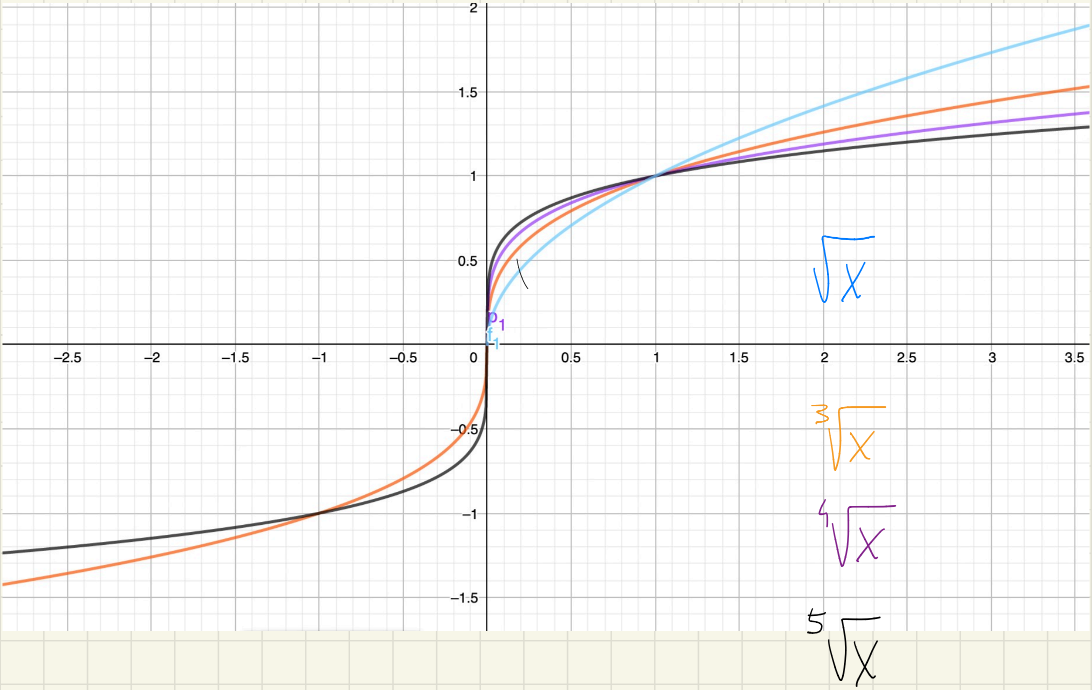
$$(2)^2 < (2)^6$$

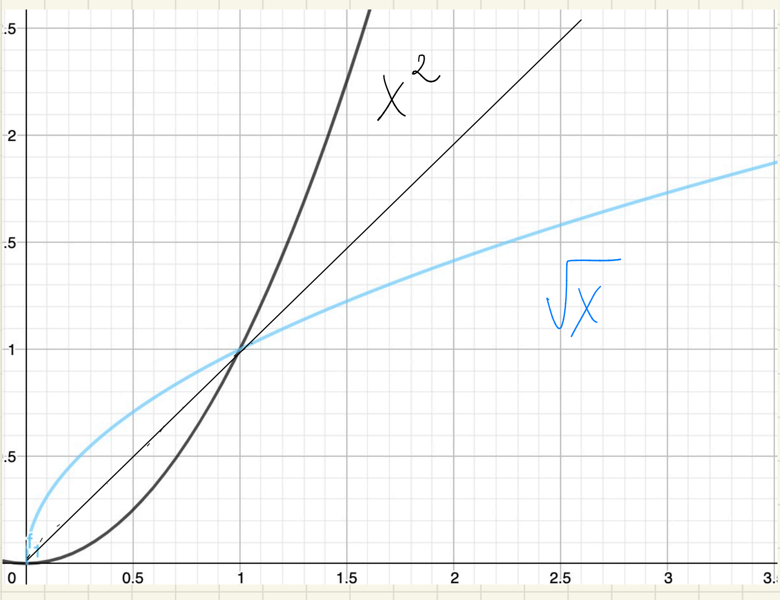


→ DISPARI

n pari : $\sqrt[n]{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

n disp $\sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





VALORE ASSOLUTO $|x|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

ES. $x = 2 \Rightarrow |x| = 2$
$x = -2 \Rightarrow |x| = 2$