8/9/22

Circonferenza e parabola

DEF. CIRCONFERENZA DI CENTRO (x_0, y_0) E RAGGIO R: È IL LUOGO DEI PUNTI (x,y) EQUIDISTANTI DA (x_0, y_0).

$$\text{dist}\big((x,y),\ (x_0,y_0)\big) = R$$

CIOÈ $\quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.

DEF. CERCHIO: $\{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\}$

CERCHIO $\supseteq$ CIRCONFERENZA.

<u>Oss.</u> L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA:

- NON CONTIENE TERMINI IN xy
- I COEFFICIENTI DEI TERMINI x^2 e y^2 SONO UGUALI.
- IL TERMINE DI GRADO NULLO È $x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

<u>Es.</u> DATA L'EQUAZIONE $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ PROVARE CHE È UNA CIRCONF. E

DETERMINARE IL RAGGIO.

$$(x^2-2x)+(y^2-6y)-6=0$$

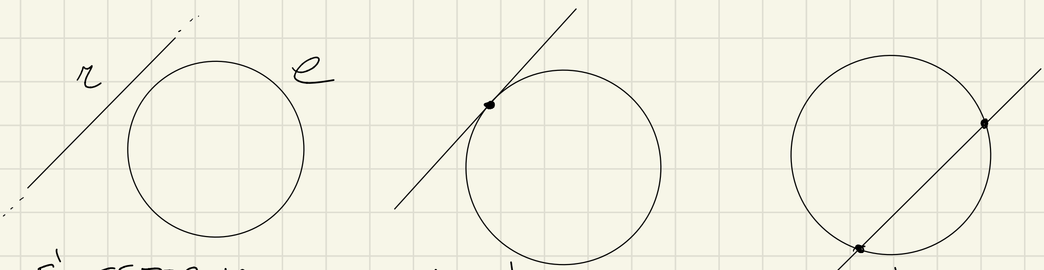
$$(x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)-6-1-9=0$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=16$$

CIRCONFERENZA DI CENTRO $(1,3)$

E RAGGIO 4.

POSIZIONE RECIPROCA RETTA - CIRCONFERENZA:



r È ESTERNA | r È TANGENTE | r È SECANTE

0 PT. DI INTERS. | 1 PT. DI INT. | 2 PT DI INT.

<u>ES.</u> TROVARE I PUNTI DI INTERSEZIONE DI

$x-y+2=0$ CON LA CIRCONF. DI

CENTRO $(1,2)$ e RAGGIO 1.

LA CIRCONF. HA EQ.: $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=1\\ x-y+2=0\end{cases}$$

2 PT DI INTERSEZIONE:

$$\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$$

<u>ES.</u> TROVARE K PER CUI LA RETTA DI EQ. $x-y+k=0$ RISULTA ESTERNA ALLA CIRCONF. DI EQ. $x^2+y^2-2x=0$, QUELLI PER CUI E' SECANTE e QUELLI PER CUI E' TANGENTE. IN QUEST'ULTIMO CASO DETERMINARE LE COORD. DEL PUNTO DI TANGENZA.

$$\begin{cases}x-y+k=0\\ x^2+y^2-2x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=y-k\\ (y-k)^2+y^2-2(y-k)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2+k^2-2yk+y^2-2y+2k=0$$

$$\Rightarrow 2y^2+y(-2k-2)+2k+k^2=0 \quad (*)$$

$$y_{1,2}=\frac{2k+2\pm 0}{4}=\frac{k+1}{2}$$

$$\Delta = (-2K-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2K+K^2) =$$

$$= 4K^2 + 4 + 8K - 16K - 8K^2 =$$

$$= -4K^2 - 8K + 4 = -4(\underbrace{K^2+2K-1}) =$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) = 8$$

$$K_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$= -4(K-K_1)(K-K_2) =$$

$$= -4\left(K-(-1+\sqrt{2})\right)\left(K-(-1-\sqrt{2})\right) =$$

$$= -4(K+1-\sqrt{2})(K+1+\sqrt{2}).$$

3 CASI:

1) $\Delta > 0 \iff -4(K+1-\sqrt{2})(K+1+\sqrt{2}) > 0$

$$\iff \underset{F_1}{(K+1-\sqrt{2})} \cdot \underset{F_2}{(K+1+\sqrt{2})} < 0.$$

		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$	
$K > -1+\sqrt{2}$:	$-$		$-$		$+$
$K > -1-\sqrt{2}$:	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$$-1-\sqrt{2} < K < -1+\sqrt{2}.$$

2) $\Delta < 0 \iff K < -1-\sqrt{2} \;\vee\; K > -1+\sqrt{2}$.

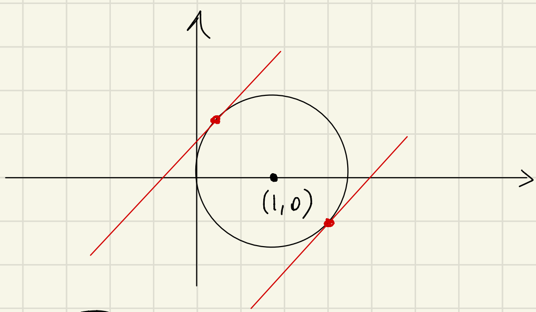
3) $\Delta = 0 \iff K_1 = -1+\sqrt{2}$

$K_2 = -1-\sqrt{2}$.

LE 2 RETTE TANGENTI ALLA CIRCONF. SONO:

$x - y + K_1 = 0$ E $x - y + K_2 = 0$

$x - y - 1 + \sqrt{2} = 0$ E $x - y - 1 - \sqrt{2} = 0$



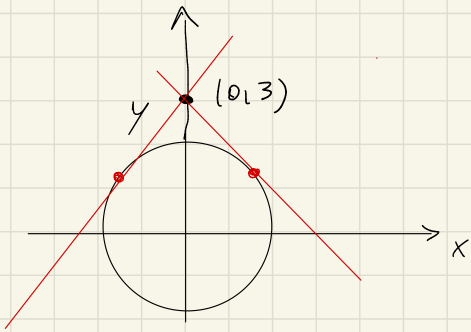
$$\begin{cases} x - y - 1 + \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \\ y = \frac{(-1+\sqrt{2})+1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - 1 - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}+2}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ES. CALCOLARE LA TANGENTE ALLA CIRCONF. $x^2 + y^2 = 4$ NEL PUNTO $(0,3)$.

$C = (0,0)$

$r = 2$



RETTA PASSANTE PER $(0,3)$: $y = mx + 3$.

$$\begin{cases} y = mx+3 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} * \\ x^2+(mx+3)^2=4 \end{cases}$$

$$x^2+m^2x^2+9+6mx=4$$

$$(1+m^2)x^2+6mx+5=0$$

$$\underline{\Delta = 0} \iff m_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Delta = 36m^2 - 4(1+m^2)\cdot 5 =$$

$$= 36m^2 - 20 - 20m^2 = 16m^2 - 20$$

$$16m^2 - 20 = 0 \iff 16m^2 = 20$$

$$\iff m^2 = \frac{20}{16} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\iff m = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

LE DUE TAN SONO: $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x+3$ e $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x+3$

DEF. PARABOLA CON ASSE // y:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

PARABOLA CON ASSE // x:

$$x = Ay^2 + By + C.$$

LA PARABOLA DI EQ. $y = ax^2 + bx + c$ E' IL LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI EQUIDISTANTI DA UN PUNTO FISSO, DETTO FUOCO $P(p,q)$, E DA UNA RETTA FISSA DETTA DIRETTRICE r, // ASSE x.

$$y = K$$

SI HA CHE:

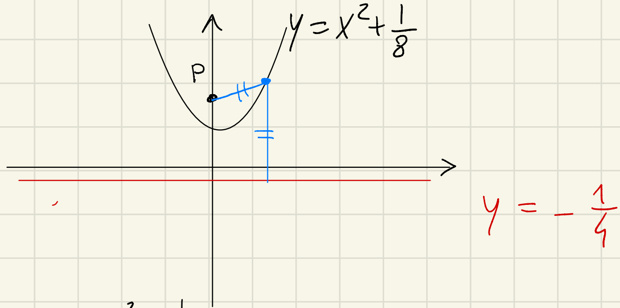
$$\text{dist}\big((x,y);(p,q)\big) = \text{dist}\big((x,y);r\big).$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = \frac{|y-K|}{1}$$

$$x^2 + p^2 - 2px + \cancel{y^2} + q^2 - 2qy = \cancel{y^2} + K^2 - 2yK$$

$$x^2 + p^2 - 2px + q^2 - K^2 = y\,(2q - 2K).$$

ES. $q = \frac{1}{4}$, $p = 0$, $K = -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $y = x^2 + \frac{1}{8}$



DEF. $y = ax^2 + bx + c$ DICIAMO ASSE LA RETTA, $\parallel y$, CHE GIOCA IL RUOLO DI ASSE DI SIMMETRIA.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

DEF. VERTICE: PUNTO DI INTERSEZIONE TRA LA PARABOLA E IL SUO ASSE.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = c - \frac{b^2}{4a}.$$

OSS. • SE $a > 0$, IL VERTICE È IL PUNTO DI MIN ASSOLUTO

• SE $a < 0$, MAX ASSOLUTO.

ES. DISEGNA LA PARABOLA $y = 3x^2 - x + 1$
E DETERMINA I PT DI INTERSEZIONE
CON $y = x + 1$.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 5/3 \end{cases} \qquad V = \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right).$$

ES. DET. K TALE PER CUI $y = x^2 - 4x + K$

INTERSECA $2x + y = 0$ IN <u>2 PUNTI</u>

DISTINTI.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + K \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow -2x = x^2 - 4x + K \\ \Rightarrow x^2 - 2x + K = 0 \end{array}$$

$$\Delta > 0 \iff 4 - 4K > 0 \iff K < 1.$$