Disequazioni 1ª parte

Disequazioni 1° grado : si sfruttano gli assiomi cui obbedisce $\leq$ in $\mathbb{Q}$

Disequazioni 2° grado : o sfruttando la decomposizione $a(x-x_1)(x-x_2)$

oppure con la parabola $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}$

Disequazioni frazionarie : le riduco a $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ e poi cerco le soluzioni di $P(x) \cdot Q(x) \geq 0$ e $Q(x) \neq 0$

Disequazioni grado>2 : utilizzando il Teorema che individua le radici razionali di un polinomio + il Teorema di Ruffini fattorizzo $P(x) = a(x-x_1) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)$ e per studiare $P(x)>0$ studio prodotto dei segni

Esercizi

N.B. Questi sono argomenti FONDAMENTALI

Prima di tutto lo studente risolva

$\max\left\{\frac{2\sqrt{5}-1}{3}, 1\right\}$, $\max\left\{\frac{5}{13}; \frac{3}{8}; \frac{7}{8}; \frac{5}{6}\right\}$

$\min\left\{\frac{5}{13}; \frac{3}{8}; \frac{7}{15}; \frac{8}{17}\right\}$

$\min\left\{-\frac{5}{13}; -\frac{3}{8}; -\frac{7}{15}; -\frac{8}{17}\right\}$

$\max\left\{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \frac{1}{4}; \sqrt{\frac{1}{2}}; \frac{1}{3}\right\}$

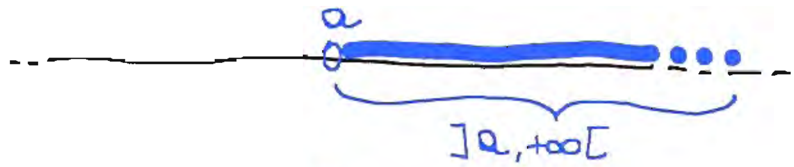
$\min\left\{-\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt[3]{-\frac{4}{5}}; -\frac{1}{2}\right\}$

Disequazioni 1° grado $x-a>0$ $(\geq,<,\leq)$ $a\in\mathbb{R}$

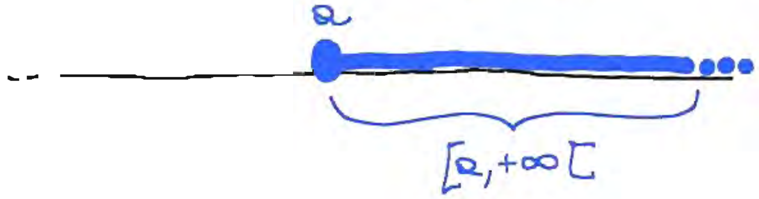
$$\{x\in\mathbb{R} : x-a>0\} = \{x\in\mathbb{R} : x>a\} =]a,+\infty[$$
$$\{\ \text{"}\ : x-a\geq 0\} = \{\ \text{"}\ : x\geq a\} = [a,+\infty[$$
$$\{\ \text{"}\ : x-a\leq 0\} = \{\ \text{"}\ \ x\leq a\} =]-\infty,a]$$
$$\{\ \text{"}\ : x-a<0\} = \{\ \text{"}\ \ x<a\} =]-\infty,a[$$

Graficamente possiamo rappresentare l'insieme delle soluzioni sulla retta

$x-a>0$



$x-a\geq 0$



Disequazioni di 2° grado $ax^2+bx+c>0$ $(\geq,<,\leq)$

$a,b,c\in\mathbb{R}$

N.B. Si veda lo studio della parabola nella dispensa precedente.

Si può sempre supporre che $a>0$: qualora $a<0$, si moltiplica per (-1) ambo i membri di

$$ax^2+bx+c>0$$

e si studia

$$-ax^2-bx-c<0$$

N.B. Se $a=0$, la disequazione è di 1° grado

Essendo $a>0$, la disequazione

$$ax^2+bx+c>0$$

ha le stesse soluzioni di

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$$

e quindi ci siamo ridotti a studiare

$$x^2+bx+c>0 \quad (1)$$
$$x^2+bx+c<0 \quad (2)$$

i) Radici reali e distinte

$x^2+bx+c=0$ ha 2 radici reali $x_1<x_2$,
allora $\{x : x^2+bx+c>0\} \equiv \{x : (x-x_1)(x-x_2)>0\}$

$$\equiv \{x : x-x_1>0 \text{ e } x-x_2>0\} \cup \{x : x-x_1<0 \text{ e } x-x_2<0\}$$
$$\equiv \left(\{x: x-x_1>0\} \cap \{x : x-x_2>0\}\right) \cup \left(\{x : x-x_1<0\} \cap \{x: x-x_2<0\}\right)$$
$$\equiv \left(]x_1,+\infty[\cap]x_2,+\infty[\right) \cup \left(]-\infty,x_1[\cap]-\infty,x_2[\right)$$
$$\equiv]-\infty, x_1[\cup]x_2,+\infty[\qquad \begin{array}{l} x_1=\min\{x_1,x_2\} \\ x_2=\max\{x_1,x_2\}\end{array}$$

Esempio $x^2-3x+2>0$ ha come soluzione
$]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

Esempio $x^2-4x-5<0$ ha le stesse soluzioni di
$(x-5)(x+1)<0$, e quest'ultima ha le sol. di
$\{(x-5)<0 \text{ e } x+1>0\}$ o $\{x-5>0 \text{ e } x+1<0\}$ ovvero
$\left(\{x-5<0\} \cap \{x+1>0\}\right) \cup \left(\{x-5>0\} \cap \{x+1<0\}\right)$ ovvero
$\left(]-\infty,5[\cap]-1,+\infty[\right) \cup \left(]5,+\infty[\cap]-\infty,-1[\right)$ ovvero
$]-1,5[\quad \cup \quad \emptyset$
$]-1,5[$

ii) radici reali coincidenti $x_1=x_2=\bar{x}$

In questo caso $x^2+bx+c=(x-\bar{x})^2>0$ se $x\neq\bar{x}$
e dunque la soluzione è $\mathbb{R}\setminus\{\bar{x}\}$

Esempio $x-2x+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 1$

iii) radici complesse e coniugate $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

In questo caso nel trinomio x^2+bx+c si ha che $b^2-4c<0$

(a=1) e dunque completando il quadrato

$$x^2+bx+c = \left(x^2+2\cdot\frac{b}{2}x\right)+c$$

$$\left(x^2+2\frac{b}{2}x+\frac{b^2}{4}\right)+c-\frac{b^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4} \geq \frac{4c-b^2}{4}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

N.B. quando $b^2+4c<0$, si ha per $-x^2+bx+c$ che

$$-x^2+bx+c = -\left(x^2-2\cdot\frac{b}{2}x\right)+c = -\left(x^2-2\frac{b}{2}x+\frac{b^2}{4}\right)+c+\frac{b^2}{4}$$

da cui trovo $-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+c+\frac{b^2}{4} \leq c+\frac{b^2}{4} = \frac{4c+b^2}{4}<0$

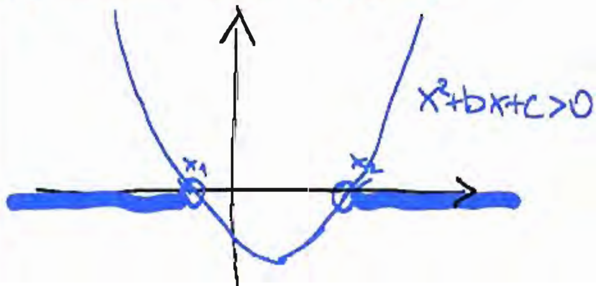
ovvero $-x^2+bx+c<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ quando $b^2+4c<0$

Esempio la disequazione $x^2+2x+5>0$ è equivalente a $(x+1)^2+4 \geq 4>0$, che è dunque soddisfatta $\forall x\in\mathbb{R}$

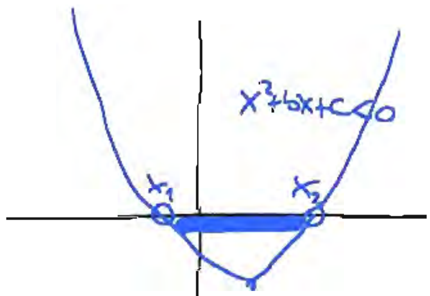
Si noti che $\Delta=(2)^2-4\cdot 5=-16<0$

Graficamente

i) radici reali $x_1\neq x_2$



$]-\infty,x_1[\,\cup\,]x_2,+\infty[$



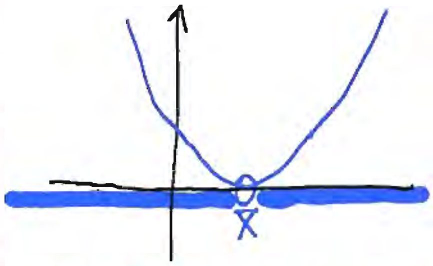
$]x_1,x_2[$

ii) radici reali coincidenti $x_1=x_2=\bar{x}$

In questo caso $x^2+bx+c \equiv (x-\bar{x})^2>0 \quad \forall x\neq\bar{x}$

$=0 \quad x=\bar{x}$

e dunque $\{x : x^2+bx+c \equiv (x-\bar{x})^2>0\} \equiv \mathbb{R}\setminus\{\bar{x}\}$

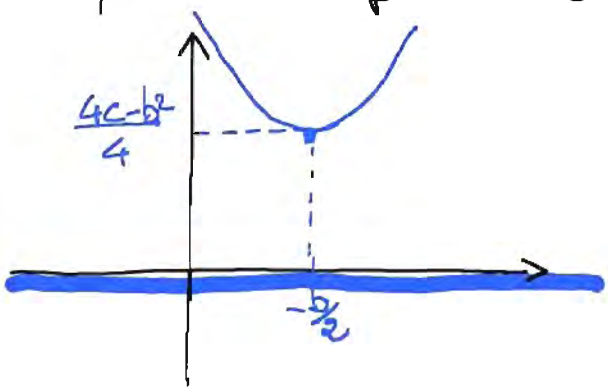


iii) Radici complesse e coniugate $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

in questo caso la disequazione $x^2+bx+c>0$ è tale che $b^2-4c<0$; la disequazione ha le stesse soluz di $x^2+bx+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c>0$

ovvero $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4} \geq \frac{4c-b^2}{4}>0$

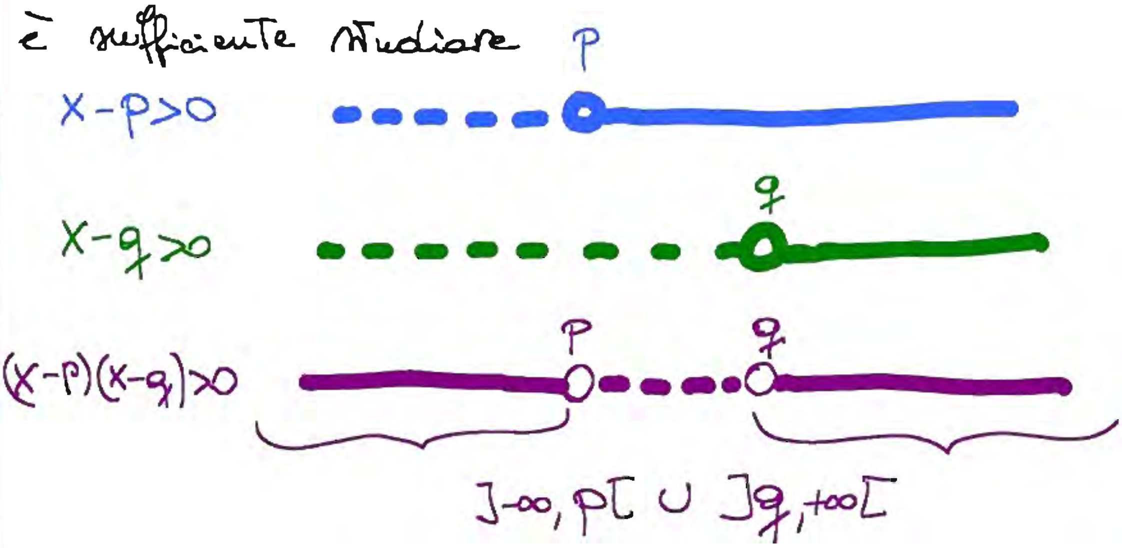
e dunque è soddisfatto $\forall x\in\mathbb{R}$



Nota Bene: abbiamo provato che per studiare

$$(x-p)(x-q)>0$$

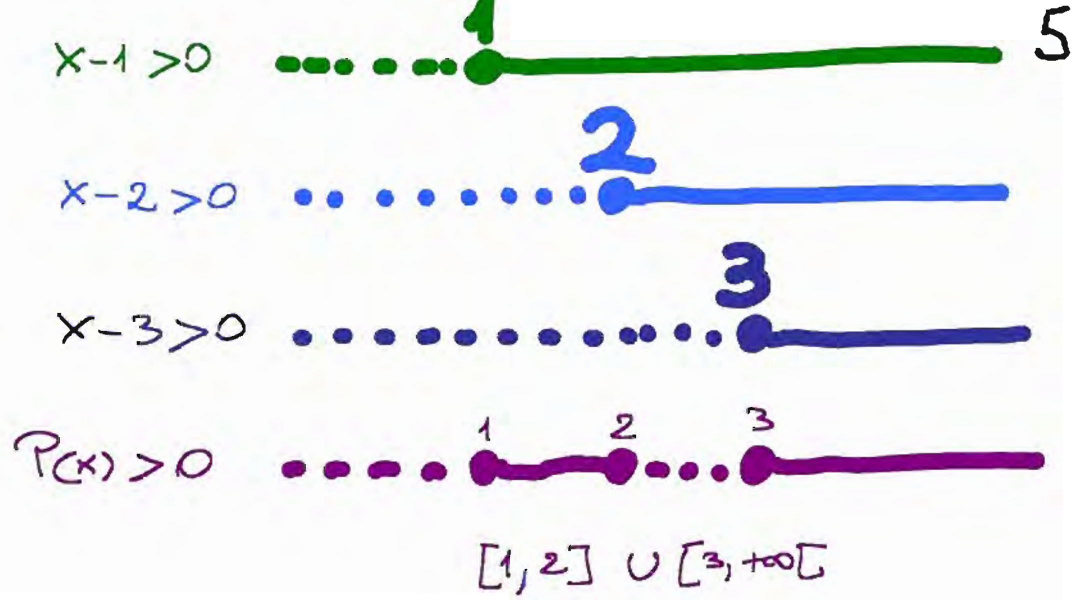
è sufficiente studiare



ovvero il prodotto dei segni

Esempio Per quali $x\in\mathbb{R}$ $(x-1)(x-2)(x-3)\geq 0$?

Va studiato il prodotto dei segni



e dunque $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \quad \forall x \in [1,2] \cup [3,+\infty[$

Sistemi di disequazioni

Si ha che $\left\{x : \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}\right\} \equiv \{x : f(x) > 0 \text{ e } g(x) > 0\}$

$$\equiv \{x : f(x) > 0\} \cap \{x : g(x) > 0\}$$

Esempio Per quali x $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$?

Va calcolata la seguente intersezione

$$\{x : x-1 > 0\} \cap \{x : x-2 > 0\} \cap \{x : x-3 > 0\}$$

ovvero

$$]1, +\infty[\ \cap \ ]2, +\infty[\ \cap \ ]3, +\infty[\ \equiv \ ]3, +\infty[$$

OSSERVAZIONE Confrontare le soluzioni della disequazione $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ con le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

① $\{x : f(x) > g(x)\} = \{x : f(x) - g(x) > 0\}$

② $\{x : f(x) > g(x)\} =$

$= \{x : \frac{f(x)}{g(x)} > 1 \text{ e } g(x) > 0\} \cup \{x : \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \text{ e } g(x) < 0\}$

$\cup \{x : f(x) > 0 \text{ e } g(x) = 0\}$

$= \left(\{x : \frac{f(x)}{g(x)} > 1\} \cap \{x : g(x) > 0\}\right) \cup \left(\{x : \frac{f(x)}{g(x)} < 1\} \cap \{g(x) < 0\}\right)$

$\cup \left(\{x : f(x) > 0\} \cap \{x : g(x) = 0\}\right)$

Disequazioni frazionarie

$g(x) \neq 0$ è condizione necessaria

$\{x : \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\} = \{x : f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) > 0\}$

$\cup \{x : f(x) \leq 0 \text{ e } g(x) < 0\}$

$= \left(\{x : f(x) \geq 0\} \cap \{x : g(x) > 0\}\right) \cup \left(\{x : f(x) \leq 0\} \cap \{x : g(x) < 0\}\right)$

Esempio Per quali x si ha $\frac{x-3}{2-3x} \geq 1$?

$\frac{x-3}{2-3x} \geq 1 \iff \frac{x-3-2+3x}{2-3x} \geq 0 \iff \frac{4x-5}{2-3x} \geq 0$ (*)

(*) ha sol.

$\left(\{x : 4x-5 \geq 0\} \cap \{x : 2-3x > 0\}\right) \cup \left(\{x : 4x-5 \leq 0\} \cap \{x : 2-3x < 0\}\right)$

$\left([\tfrac{5}{4}, +\infty[\cap]-\infty, \tfrac{2}{3}[\right) \cup \left(]-\infty, \tfrac{5}{4}] \cap]\tfrac{2}{3}, +\infty[\right)$

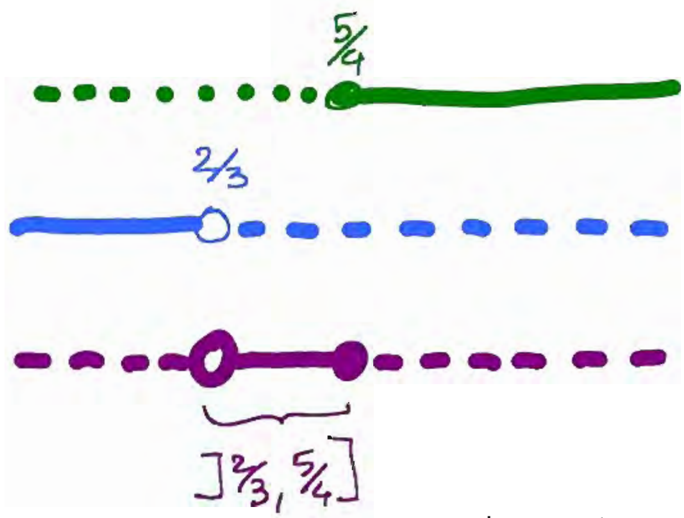
$\emptyset \quad \cup \quad]\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{4}]$

NOTA: si poteva arrivare al risultato osservando

$4x-5\geq 0$

$2-3x>0$

$\dfrac{4x-5}{2-3x}\geq 0$



ovvero trattando la frazione come un prodotto $+(2-3x\neq 0)$

Problema:

① $\left\{x: \dfrac{x-1}{2-x}>0\right\} \equiv \left\{x: (x-1)(2-x)>0\right\}$ è vera?

② $\left\{x: \dfrac{x-1}{2-x}\geq 0\right\} \supsetneq \left\{x: (x-1)(2-x)>0\right\}$ è vera?

③ $\left\{x: \dfrac{x-1}{2-x}\geq 0\right\} \subsetneq \left\{x: (x-1)(2-x)\geq 0\right\}$ è vera?

Disequazioni ordine >2

Esempio per quali x $\quad x^4-16>0$?

In questo caso si procede fattorizzando

$$P(x)=x^4-16=(x^2)^2-4^2=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$\begin{cases}\text{Osserviamo poi che}\\ x^2+4\geq 4>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

dunque

$$\{x: P(x)>0\} \equiv \{x:(x-2)(x+2)>0\}\cap\{x: x^2+4>0\}$$

$$\equiv \{x:(x-2)(x+2)>0\}\cap\mathbb{R}$$

$$\equiv\ ]-\infty,-2[\ \cup\ ]2,+\infty[$$

(vedi le disequazioni 2° grado)

Dunque il problema sta nella fattorizzazione
A tal fine è fondamentale il Teorema di Ruffini

"$P(x)$ polinomio grado n: $P(a)=0$ $a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists Q(x)$ polinomio grado $n-1$: $P(x) = Q(x)(x-a)$"

ovvero "$P(a)=0 \Rightarrow (x-a)$ divide $P(x)$"

Può essere utile il seguente

Teorema Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
con $a_i \in \mathbb{N}$
Se $s \in \mathbb{N}$ è t.c. $P(s)=0$ allora s divide a_0

(Si veda la lezione 3 "Algebra")

Q5

Esercizio 2.11 : risolvete le seguenti disequazioni:

a) $x^2 - 15x - 16 > 0$ ← Studente

b) $(x-2)(x-2)(x-3) < 0$

c) $(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 6) \geq 0$ ← docente

d) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

a) $\{x : x^2 - 15x - 16 > 0\} = \{x : (x-16)(x+1) > 0\} =$

$= \{x : x > 16 \text{ e } x > -1\} \cup \{x : x < 16 \text{ e } x < -1\}$

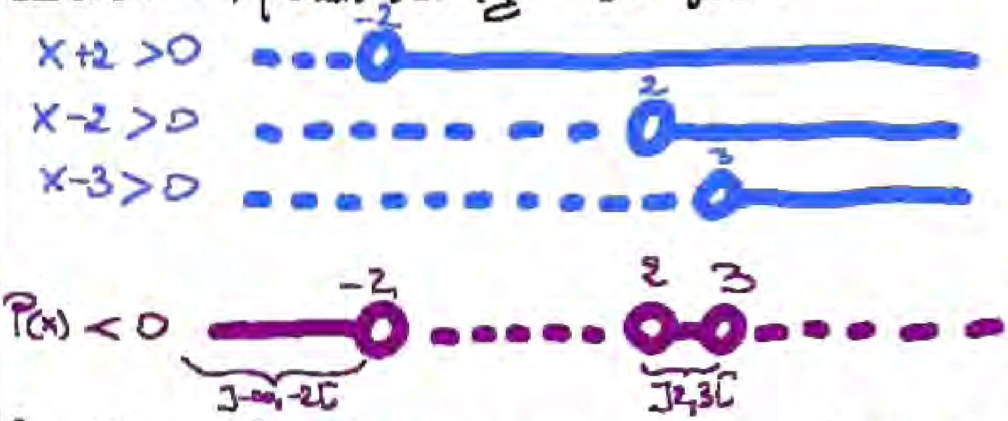
$= (]16, +\infty[\cap]-1, +\infty[) \cup (]-\infty, 16[\cap]-\infty, -1[)$

$=]16, +\infty[\cup]-\infty, -1[$

Si può risolvere anche per via grafica disegnando la parabola

b) $P(x) = (x+2)(x-2)(x-3) < 0$

per non appesantire le notazioni risolviamo questo esercizio calcolando il prodotto dei segni dei fattori



$\{x : P(x) < 0\} = \{x : x < -2 \text{ o } 2 < x < 3\} =]-\infty, -2[\cup]2, 3[$

per la risoluzione grafica dovrei studiare una cubica il che non è semplicissimo

c) $Q(x) = (x^2 + x - 2)(x^2 - x - 6) \geq 0$

Osservando che $Q(x) = (x+2)(x-1)(x-3)(x+2) \geq 0$, si ha

$\{x : Q(x) = (x+2)^2 (x-1)(x-3) \geq 0\} \equiv \{x : (x-1)(x-3) \geq 0\}$

$(x+2)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$!!

Dunque $\{x : Q(x) \geq 0\} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

d) $R(x) = 2x^3+3x^2-2x-3 > 0$

In questo caso dobbiamo scomporre in fattori di 1° grado $R(x)$. I divisori interi di -3, il termine noto, sono ± 1 e ± 3, dunque le soluzioni intere saranno $\in \{\pm 1, \pm 3\}$. Si osserva che $R(1)=0$, dunque $(x-1)$ divide $R(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+3x^2-2x-3 & x-1 \\
\hline
2x^3-2x^2 & 2x^2+5x+3 \\
\hline
// \quad 5x^2-2x-3 & \\
\quad 5x^2-5x & \\
\hline
\quad // \quad 3x-3 & \\
\quad \quad 3x-3 & \\
\quad \quad // &
\end{array}
$$

L'algoritmo della divisione tra polinomi ci dà

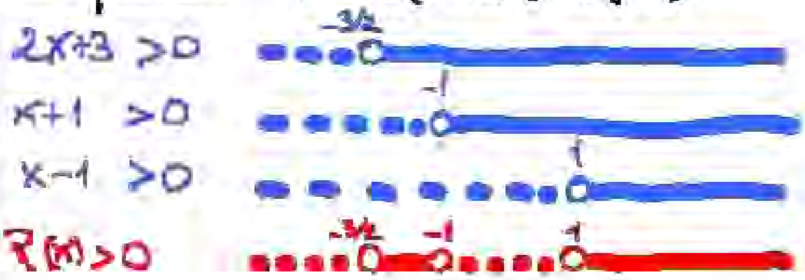
$$R(x) = (x-1)(2x^2+5x+3)$$

Inoltre

$$2x^2+5x+3 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \begin{cases} -3/2 \\ -1 \end{cases}$$ da cui

segue $2x^2+5x+3 = 2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1) = (2x+3)(x+1)$

e quindi $R(x) = (2x+3)(x+1)(x-1)$



e dunque $\{x \mid R(x) > 0\} =]-3/2, -1[\cup]1, +\infty[$ ▥

S Esercizio 2.12 : risolvete la disequazione $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} < 2$

Iniziamo con l'osservare che $x=-1$, $x=+1$ non sono valori accettabili. La disequazione è equivalente a

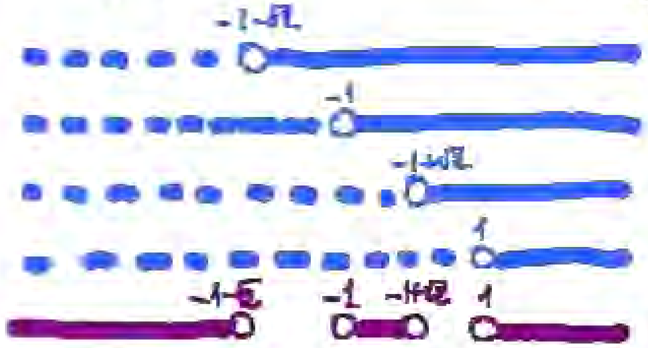
$$\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-1} - 2 < 0$$ che equivale a

$$\frac{-4x-2x^2+2}{x^2-1} < 0$$ che equivale a

ha le stesse soluzioni di

$$-2\,\frac{x^2+2x-1}{x^2-1} < 0$$ che equivale a (divido per -2!)

$$R(x) = \frac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{x^2-1} > 0 \qquad x^2+2x-1=0 \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$$\{x : R(x)>0\} =]-\infty,-1-\sqrt{2}[\,\cup\,]-1,-1+\sqrt{2}[\,\cup\,]1,+\infty[$$

Esercizio 2.13 : risolvete i seguenti sistemi di disequazioni:

QS a) $\begin{cases} x^2 \geq x \\ x+3 < 9-x \end{cases}$ ← studente b) $\begin{cases} 1 < x^2 \leq 4 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \,. \end{cases}$ ← docente

a) $\left\{x : \begin{cases} x^2 \geq x \\ x+3<9-x \end{cases}\right\} = \{x : x^2-x \geq 0\} \cap \{x : 2x-6<0\}$

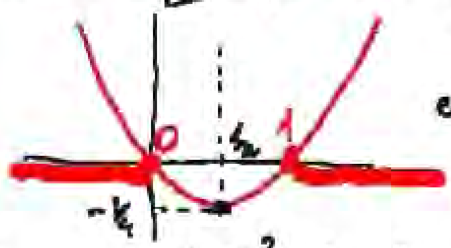
$= \{x : x(x-1) \geq 0\} \cap \{x : x<3\}$

$= \left(]-\infty,0] \cup [1,+\infty[\right) \cap]-\infty,3[\; = \;]-\infty,0] \cup [1,3[$

procedendo come nell'esercizio precedente. Oppure si ha

$$x^2-x = x^2-x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4} = \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} \geq 0$$

si risolve graficamente osservando che la parabola



ha vertice in $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $x^2-x=0$ in 0 e 1 e quindi le soluzioni sono date da $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$

b) $\left\{x : \begin{cases} 1<x^2 \leq 4 \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{cases}\right\} = \left\{x : \begin{cases} 1<x^2 \\ (x-5)(x-1) \geq 0 \end{cases}\right\} \cap \left\{x : \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ (x-5)(x-1) \geq 0 \end{cases}\right\}$

$$= \Big[\underbrace{\{x : x^2-1>0\}}_{A} \cap \underbrace{\{x : (x-5)(x-1) \geq 0\}}_{B}\Big] \cap \Big[\underbrace{\{x : x^2-4 \leq 0\}}_{C} \cap \underbrace{\{x : (x-5)(x-1) \geq 0\}}_{B}\Big]$$

$= A \cap (B \cap C) = A \cap [-2,1] = [-2,-1[$

$A = \{x : (x-1)(x+1) > 0\} =]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

$B = \{x : (x-1)(x-5) \geq 0\} =]-\infty,1] \cup [5,+\infty[$

$C = \{x : (x-2)(x+2) \leq 0\} = [-2,2]$

S

Esercizio 2.17 : dite se $x = 2$ è radice del polinomio $2x^3 - x^2 - 4x - 4$, e in caso affermativo dividete il polinomio per $x - 2$.

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 4$ $\quad P(2) = 2 \cdot 8 - 4 - 4 \cdot 2 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ (per il Thm di Ruffini) $x-2$ divide $P(x)$

e si ottiene

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 - x^2 - 4x - 4 & x-2 \\ \cline{2-2}
2x^3 - 4x^2 & 2x^2+3x+2 \\ \cline{1-1}
// \quad 3x^2 - 4x - 4 & \\
\quad 3x^2 - 6x & \\ \cline{1-1}
\quad // \quad 2x - 4 & \\
\qquad 2x - 4 & \\ \cline{1-1}
\qquad // &
\end{array}
$$

e quindi si ottiene

$P(x) = (x-2)(2x^2+3x+2)$

S

Esercizio 2.18 : dividete il polinomio $P(x)$ per il polinomio $D(x)$ nei casi seguenti:

a) $P(x) = 6x^3 - 2ax + a^2x^2 - 1$, $D(x) = a - 2x$

b) $P(x) = x^4 + 1$, $D(x) = x^2 - x\sqrt{2} + 1$

c) $P(x) = ax^4 - 3a^2x$, $D(x) = x - a$.

Facciamo i calcoli nel solo caso b)

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 & x^2 - x\sqrt{2} + 1 \\ \cline{2-2}
x^4 - x^3\sqrt{2} & x^2 + x\sqrt{2} + 2 \\ \cline{1-1}
// \quad x^3\sqrt{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 & \\
\quad x^3\sqrt{2} - x^2 \cdot 2 & \\ \cline{1-1}
\quad // \quad 2x^2 \quad 0 \quad 1 & \\
\qquad 2x^2 - 2x\sqrt{2} & \\ \cline{1-1}
\qquad // \quad 2x\sqrt{2} + 1 &
\end{array}
$$

e quindi si ottiene

$x^4 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 2) + 2x\sqrt{2} + 1$

Esercizio 2.19 : risolvete le seguenti equazioni di secondo grado:

DS

a) $x^2 = 4$ Studente
b) $2x^2 + x = 1$
c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 + 8 = x$ Studente
e) $bx^2 + cx + a = 0$ Docente
f) $ax^2 + (a^2 - 2b)x - 2ab^2 = 0$

a) $x_{1,2} = \pm 2$

b) $x^2 + \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \iff x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$

$\iff \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \iff x + \frac{1}{4} = \pm \frac{3}{4}$

$\iff x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1 \qquad x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0 \iff x_{1,2} = 3$

d) $x^2 - x + 8 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 32}}{2}$

NON HA SOL. REALI

e) $bx^2 + cx + a = 0$

$b = c = 0 \quad a \neq 0$ IMPOSSIBILE

$b = 0 \quad c \neq 0 \Rightarrow x = -a/c$

$b \neq 0 \quad x_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b}$
- 2 sol. reali se $c^2 - 4ab > 0$
- 1 " " se $c^2 - 4ab = 0$
- NO SOL. REALI se $c^2 - 4ab < 0$

f) $ax^2 + (a^2 - 2b)x - 2ab^2 = 0$

$a = 0 \quad b = 0$ si riduce a $0 = 0$

$a = 0 \quad b \neq 0 \quad x = 0$

$a \neq 0 \quad b = 0 \quad ax^2 + a^2x = ax(x + a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = -a$

$a \neq 0 \quad a^2 = 2b \quad ax^2 - \frac{a^5}{2} = a\left(x^2 - \frac{a^4}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{2}}, \; x_2 = -\frac{a^2}{\sqrt{2}}$

$a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad a^2 \neq 2b \quad x_{1,2} = \frac{2b - a^2 \pm \sqrt{(a^2 - 2b)^2 + 8a^2b^2}}{2a}$

Esercizio 2.20 : risolvete le seguenti disequazioni di secondo grado:

QS

a) $x^2 > 8$ Studente
b) $x^2 - 3x < 0$
c) $x^2 + 5x + 1 \geq 0$
d) $x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$ Docente

d) $\{x : x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0\} = \{x : (x-2a)(x-a) \leq 0\}$

$= \{x : x \leq 2a \text{ e } x \geq a\} \cup \{x : x \geq 2a \text{ e } x \leq a\}$

$= \left( ]-\infty, 2a] \cap [a, +\infty[\right) \cup \left([2a, +\infty[\cap]-\infty, a] \right)$

$= \begin{cases} [a, 2a] & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ [2a, a] & \text{se } a < 0 \end{cases}$