Disequazioni 2 parte

Funzione esponenziale (base $a>0$, $a\neq1$)
" logaritmo (" " ")
Cambio di base nel logaritmo.
" " " nell'esponenziale
Disequazioni esponenziali & logaritmiche

Confronto tra logaritmi in basi $\neq$

N.B. FARE LE DISEQUAZIONI !!
FARE L'ULTIMO ESERCIZIO !!

Esponenziale e logaritmo

Decadimento radioattivo

Un materiale radioattivo soddisfa una legge di decadimento le cui soluzioni hanno andamento esponenziale

Indice di alcalinità/acidità : pH

Il decibel : dB

la misura del guadagno di un amplificatore (livello di pressione sonora) $= 20 \log_{10} \frac{P}{P_0}$

dove P_0 = pressione soglia udibilità

Le proprietà delle potenze si ritrovano nelle proprietà della funzione esponenziale.

Prenderemo come "base" dell'esponenziale il numero

$e = 2,718\ldots = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (come è il limite al momento non serve saperlo)

Questo numero $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ diventa, in Analisi 1, "la base" usata sistematicamente perché (come si vedrà)

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (e dunque la derivata di e^x è e^x)

mentre $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a = \log a \begin{cases} < 0 & 0<a<1 \\ 0 & a=1 \\ \in]0,1[& 1<a<e \\ 1 & a=e \\ \in]1,+\infty[& e<a \end{cases}$

Osservazione : Nel caso delle funzioni trigonometriche la scelta del radiante come unità di misura permette notevoli semplificazioni nel calcolo delle derivate

La funzione esponenziale base $a \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$: $f(x) = a^x$

a^x è l'unica funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ t.c.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
2) $a^1 = a$

dove $a > 0$, $a \neq 1$

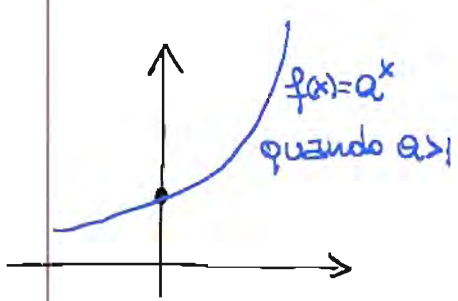
Osservazione: il nome "funzione esponenziale" viene riservato al caso $a = e = 2{,}718\ldots$, il numero di Eulero.

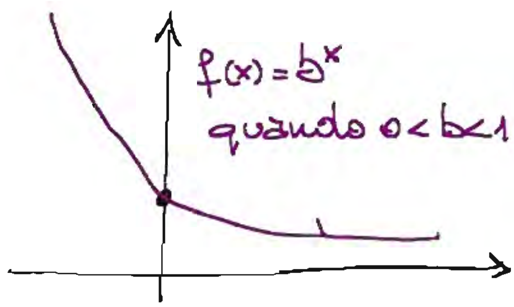
Dalle proprietà 1) e 2) e dalla continuità seguono le altre ($a>0$, $a \neq 1$)

3) $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4) $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$
5) a^x è strettamente crescente se $a > 1$, strett. decrescente se $0<a<1$
6) $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$

Oss: Da 4) e 6) segue $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, e dunque noti i valori di a^x per $x > 0$ deduco quelli per $x<0$

Oss: quindi $a^x \uparrow$ se $a>1$. Preso $b \in (0,1)$, si ha che $\frac{1}{b} > 1 \Rightarrow \frac{1}{b^x} \uparrow \Rightarrow b^x \downarrow$. I grafici sono perciò





Nota Bene: per il momento non è del tutto chiara la relazione tra a^x e b^x, ovvero tra esponenziali con basi $\neq$

Il logaritmo in base a: $f(x)=\log_a x$

Si dimostra che $f(x)=a^x$ per $a>1$
- continua $\forall x\in\mathbb{R}$
- strettamente crescente su $\mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$

dunque esiste la funzione inversa $f^{-1}:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$$f^{-1}(f(x))=x \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad f(f^{-1}(y))=y \quad \forall y>0$$

$$\log_a(a^x)=x \qquad a^{\log_a y}=y$$

La funzione logaritmo in base $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)=\log_a(x)$

essendo $\log_a(x)$ la funzione inversa di a^x

1') $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a(y) \quad \forall x,y\in]0,+\infty[$

2') $\log_a(a)=1$

$\log_a(x)$ è l'unica funzione continua su $]0,+\infty[$ che soddisfa 1') e 2').

Osservazione 1') e 2') seguono da 1) e 2)

infatti, per definizione di funzione inversa, la 1'

$$f^{-1}(x)+f^{-1}(y)=f^{-1}(xy) \quad \forall x,y>0$$

equivale a

$$xy=f(f^{-1}(x))\cdot f(f^{-1}(y))=f(f^{-1}(x)+f^{-1}(y))=f(f^{-1}(x\cdot y))=xy$$

e dunque

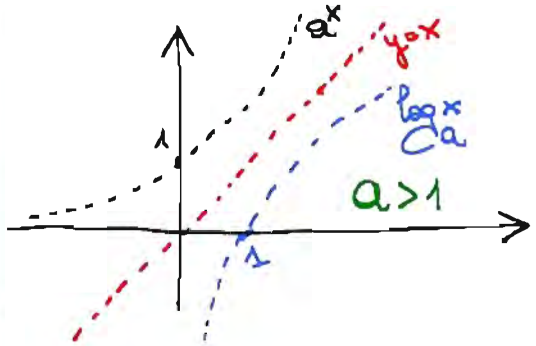
$$\log_a(x\cdot y)=\log_a(x)+\log_a(y)$$

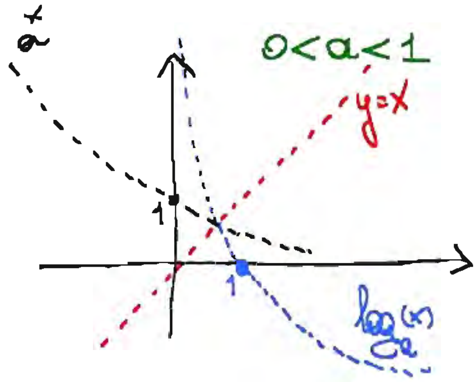
4') $\log_a(x^y) = y\log_a x \quad \forall x>0 \ \forall y>0$

5') $\log_a x$ strettamente crescente $\forall a>1$

6') $\log_a(1) = 0 \quad \forall a>0 \ a\neq 1$

3') $\log_a x \begin{cases} >0 & \forall x>1 \\ <0 & \forall x\in(0,1) \end{cases}$ se $a>1$





Osservazione: Le funzioni a^x e $\log_a x$ permettono di dare un significato all'espressione

$$x^y \ , \ x>0$$

Infatti: $\log(e^x) = e^{\log x} = x \quad \forall x>0 \Rightarrow x^y = e^{\log(x^y)} \Rightarrow$

$$x^y = e^{y\cdot \log x} \quad \forall x>0 \ \forall y\in\mathbb{R}$$

Più in generale, essendo $x = a^{\log_a x} \ \forall x>0 \ \forall a>0, a\neq 1$

si ha $x^y = a^{\log_a(x^y)} = a^{y\log_a(x)} \quad \forall x>0 \ \forall y\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$$x^y = a^{y\log_a(x)} \quad \forall x>0 \ \forall y\in\mathbb{R}$$

quando $a>0, \ a\neq 1$

Teorema (Formula del cambio di base) Siano $a,b>0, a\neq 1 \ b\neq 1$ le due basi:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \qquad \forall x>0$$

dim per definizione di f.ne inversa $x = a^{\log_a(x)} = b^{\log_b(x)} > 0$

e dunque $\log_b(x) = \log_b\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_a(x)\cdot\log_b(a)$

$$\Rightarrow \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Analogamente $\log_a(x) = \log_a\left(b^{\log_b(x)}\right) = \log_b(x)\log_a(b) \Rightarrow \log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ $\blacksquare$

Cambio di base nell'esponenziale

Data $f(x)=a^x$ e $g(x)=b^x$, con $a,b>0$ $a,b\neq 1$, si ha

$$f(x)=a^x=\left(b^{\log_b a}\right)^x = b^{x\cdot\log_b a} = g\left(x\cdot \log_b a\right)$$

Esercizio: provare che $\log_a(b)\cdot\log_b a = 1$ $\forall a,b>0$, $a,b\neq 1$

dim

nella formula del cambio di variabili, si prende $y=a$ $e=b$ $x=b$

Osservazione: a^x tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ quando $a>1$, ed è "molto più veloce" di x^k $\forall k\in\mathbb{N}$, ovvero

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty \quad \forall k\in\mathbb{N}, \forall a>1$$

Analogamente, quando $a>1$ anche $\log_a(x)$ tende a $+\infty$ quando $x\to+\infty$, ed è "molto più lenta" di x^α $\forall\alpha>0$, ovvero

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0 \quad \forall\alpha>0 \quad \forall a>1$$

Problema: cosa accade quando la base $a=1$?
In questo caso si ha $1^x=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$, dunque la funzione non è monotona e quindi 1^x non è invertibile. Ne segue che non ha senso considerare $\log_1 x$!!!

QS

Esercizio 3.49 : risolvete le seguenti equazioni.

a) $10^x = 100$ } studente
b) $7^x = 1$
c) $4^x = 3$

d) $4^x = 2 \cdot 3^x$ ← docente + studente
e) $10^x = 3^{x+1}$
f) $3^{2x} - 3^x - 5 = 0$ ← docente

a) $10^x = 100 \iff 10^x = 10^2$ ed essendo $f(x) = 10^x$ strett. crescente

$\iff x = 2$

oppure si osserva che $10^x = 100 \overset{\log_{10} \text{ è iniettiva!}}{\iff} \log_{10} 10^x = \log_{10} 100$

$\iff x = 2$

b) $7^x = 1 \iff \log_7 7^x = \log_7 1 \iff x \cdot \log_7 7 = \log_7 7^0 \iff x = 1$

c) $4^x = 3 \iff \log_4 4^x = \log_4 3 \iff x \log_4 4 = \log_4 3 \Rightarrow x = \log_4 3$

Osserviamo che $0 = \log_4 1 < \log_4 3 < \log_4 4 = 1$

d) $4^x = 2 \cdot 3^x \overset{3^x \neq 0}{\iff} \left(\frac{4}{3}\right)^x = 2 \iff x = \log_{4/3} 2$

Osserviamo che $1 = \log_{4/3} 4/3 < \log_{4/3} 2 < \log_{4/3} \frac{16}{9} = 2$

In alternativa $4^x = 2 \cdot 3^x \iff \log 4^x = \log(2 \cdot 3^x) \iff x \log 4 = \log 2 + x \log 3$

$x(\log 4 - \log 3) = \log 2 \iff x = \frac{\log 2}{\log 4 - \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3/4}$ $\boxed{\log = \log_e}$

e) $10^x = 3^{x+1} \iff \left(\frac{10}{3}\right)^x = 3 \iff x = \log_{10/3}(3)$

$10^x = 3^x \cdot 3 \iff \log 10^x = \log 3^x + \log 3 \iff x(\log 10 - \log 3) = \log 3$

$\iff x = \frac{\log 3}{\log 10 - \log 3}$

f) $3^{2x} - 3^x - 5 = 0$ In questo caso conviene porre $t = 3^x$

dunque ci si riduce a risolvere

$t^2 - t - 5 = 0 \iff t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2}$ < $\cancel{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}$ Non accettabile: <0 ; $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{21}}{2} = 3^x \Rightarrow x = \log_3\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

Esercizio 3.50 : risolvete le seguenti equazioni:

a) $\log_3 x = 3$ studente
b) $\log_3 x = \log_3 2 - \log_3(x+1)$
c) $\log_2 x + \log_4 x = 3$
d) $(\log_2 x)(\log_3 x) = 1$
e) $4\log_4 x - \log_2(1+x) = 0$
f) $\log_x e + \log x - 2 = 0$.

1-2 docente e poi per studente

a) $\log_3 x = 3 \iff 3^{\log_3 x} = 3^3 \iff x = 81$

↑ 3^x è crescente $\Rightarrow$ iniettiva

b) $\log_3 x = \log_3 2 - \log_3(x+1) \iff \log_3 x = \log_3 \frac{2}{x+1}$ $\boxed{x>0}$

devo supporre $\boxed{x>-1}$ $\boxed{x>0}$

$\iff x = \frac{2}{x+1}$ $\boxed{x>0} \iff x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$ $\boxed{x>0}$

(verifica immediata) $\iff x = 1$ ($x = -2$ NON È ACCETTABILE!)

c) $\log_2 x + \log_4 x = 3$ ricordo $\log_4 x = \log_4 2^{\log_2 x} = \log_2 x \cdot \log_4 2 = \frac{1}{2}\log_2 x$

$\Updownarrow$

$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = 3 \iff \frac{3}{2}\log_2 x = 3 \iff \log_2 x = 2 \iff x = 2^2 = 4$

$\boxed{x>0}$

(verifica immediata)

d) $\log_2 x \cdot \log_3 x = 1$ ricordo $\log_2 x = \log_2 3^{\log_3 x} = \log_3 x \cdot \log_2 3$

$\Updownarrow$

$\log_3 x \log_2 3 \log_3 x = 1$ $\boxed{x>0}$ $\iff \left(\log_3 x\right)^2 = \frac{1}{\log_2(3)}$ $\boxed{x>0}$ $\iff \log_3 x = \left(\log_3(2)\right)^{1/2}$ $\boxed{x>0}$

$\frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$

$\iff x = 3^{\left(\log_3 2\right)^{1/2}}$

↑ passo all'esponenziale in ambo i membri

e) $4\log_4 x - \log_2(1+x) = 0$ $\boxed{x>0}$ $\log_4 x = \log_4 2^{\log_2 x} = \log_2 x \cdot \log_4 2 = \frac{1}{2}\log_2 x$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 4\cdot\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2(1+x) = 0 \\ \boxed{x>0} \end{cases} \iff \begin{cases} \log_2 \frac{x^2}{1+x} = 0 = \log_2 1 \\ \boxed{x>0} \end{cases}$$

$\iff \frac{x^2}{1+x} = 1$ $\boxed{x>0}$ $\iff \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{matrix} x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4}\right) \\ x>0 \end{matrix}$

↑ log è iniettiva

ma la radice $(1-\sqrt{5})\cdot\frac{1}{2}$ NON ACCETTABILE $\Rightarrow x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

f) $\log_x e + \log x - 2 = 0$ ricordo che $\log_x e = \dfrac{1}{\log x}$ $\quad \log x = \log_e x$

$x>0,\ x\neq 1$ $\qquad x>0,\ x\neq 1$ il denominatore deve essere $\neq 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log x} + \log x - 2 = 0 \\ x>0,\ x\neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \log^2 x - 2\log x + 1 = (\log x - 1)^2 = 0 \\ x>0 \quad x\neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \log x = 1 \\ x>0 \quad x\neq 1 \end{cases} \iff \boxed{x = e}$$

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Per introdurre queste disuguaglianze, è sufficiente osservare che

$$x < y < z < \omega < \dots \Rightarrow e^x < e^y < e^z < e^\omega < \dots$$

ovvero l'esponenziale PRESERVA L'ORDINE (quando la base è >1)

altrimenti

Quando $0<a<1$

$$x < y < z < \omega < \dots \Rightarrow a^x > a^y > a^z > a^\omega > \dots$$

ovvero inverte l'ordine

Grazie a questa osservazione, è semplice passare da una disug del tipo

$$e^{f(x)} < e^{g(x)}$$

ad una disuguaglianza del tipo

$$f(x) < g(x)$$

Considerazioni perfettamente analoghe valgono per $\log_a x$, che conserva l'ordine se $a>1$, mentre lo inverte (l'ordine) quando $0<a<1$

Esercizio Determinate le soluzioni di $\log(x^2+5x-6) > \log(3x^2-3x-6)$ Impostare e risolvere 9

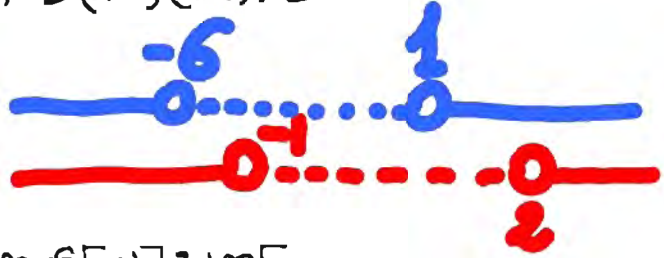
dim

La prima cosa da vedere è <u>dove esistono ambo i membri</u>, ovvero debbo cercare per quali x

$$\begin{cases} x^2+5x-6=(x+6)(x-1)>0 \\ 3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)=3(x-2)(x+1)>0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases}]-\infty,-6[\,\cup\,]1,+\infty[\\ ]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[\end{cases}$$



e quindi C.E.: $]-\infty,-6[\,\cup\,]2,+\infty[$

la disequazione equivale a (log è iniettiva)

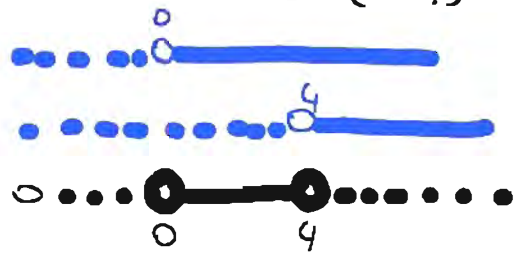
$$x^2+5x-6 > 3x^2-3x-6$$

$$0 > 2x^2-8x = 2x(x-4)$$

e $2x>0$

$x-4>0$

$\Rightarrow 2x(x-4)<0$



$]0,4[$

Dunque la soluzione è data da

$$(]-\infty,-6[\,\cup\,]2,+\infty[)\cap\,]0,4[\;\equiv\;]2,4[$$

Esercizio Determinare le soluzioni della disequazione

$$\log(x+1) + \log(x-2) \leq \log 10$$

Per studenti

Esercizio Determinare le soluzioni della disequazione

$$9^x + 2 \geq 3 \cdot 3^x$$

dim la disequazione è equivalente a

$$3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 \geq 0$$

N.B. qui non serve campo esistenza!

Risolviamo, posto $t = 3^x$, la disequazione

$$t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1) \geq 0$$

che ha per soluzione $\quad t \leq 1 \;\; \text{o} \;\; 2 \leq t$

Ma $t = 3^x$, e quindi $\quad 3^x \leq 1 \;\; \text{o} \;\; 2 \leq 3^x$

che diventa $\quad x \leq \log_3 1 = 0 \;\; \text{o} \;\; \log_3 2 \leq x$

e infine trovo

$$]-\infty, 0] \cup [\log_3 2, +\infty[$$

Esercizio Ordinare i numeri

$$\log_{\sqrt{2}} 4 \qquad \log_5 \frac{1}{10} \qquad -\log_2 7$$

Per studenti, ma va poi spiegato

dim possiamo scrivere i numeri come segue

$$\log_{\sqrt{2}} 4 = 4 \qquad \log_5 \frac{1}{10} = -\log_5 10 \qquad -\log_2 7$$

Certamente $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$ (in quanto $\sqrt{2}^4 = 2^2 = 4$)

Per il confronto dei restanti, porto $-\log_5 10$ in base 2

$$-\log_5 10 = -\frac{\log_2 10}{\log_2 5}$$

e ci chiediamo se $-\dfrac{\log_2 10}{\log_2 5} > -\log_2 7 \iff \log_2 10 < \log_2 5 \cdot \log_2 7$

$\iff \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5 < \log_2 5 \cdot \log_2 7 \iff 1 < \log_2 5 (\log_2 7 - 1)$

$\iff 1 < \log_2 5 \cdot \left(\log_2 2 + \log_2 \frac{7}{2} - 1\right) \iff 1 < \log_2 5 \cdot \log_2 \frac{7}{2}$

Ma $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$ & $\log_2 \frac{7}{2} > \log_2 3 > \log_2 2 = 1$

e dunque $\log_2 5 \cdot \log_2 \frac{7}{2} > 2 \cdot 1 > 1$

Ne segue che $\frac{\log_2 10}{\log_2 5} > -\log_2 7$ È VERA

dunque abbiamo che

$$\log_{\sqrt{2}} 4 > \log_5 \frac{1}{10} > -\log_2 7$$ ■