# Grafici di funzioni

Grafico di una funzione

Esempio e controesempio

Dominio massimale

Crescenza stretta/debole

Esempio (importante $x^2+xy+y^2>0 \ \forall (x,y)\neq(0,0)$)

Decrescenza stretta/debole

Teorema: crescenza (decrescenza) $\Rightarrow$ iniettività

Controesempio iniettività $\not\Rightarrow$ crescenza (decrescenza)

funzioni pari/dispari

$f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} = \max\{f(x),0\}$ $\quad f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} = \max\{-f(x),0\}$

$f^+(x)+f^-(x) = |f(x)|$

$f^+(x)-f^-(x) = f(x)$

definizione di $f^p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ $\quad f^d = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

funzione periodica (definizione)

periodo e minimo periodo

somma di funzioni periodiche con periodi in rapporto razionale

Esercizi (*)

Parabola e disequazioni di 2° grado

Esercizi da 4.7 a 4.17

Costruire $f^+(x) = \max\{f(x),0\}$ $\quad f^-(x) = \max\{-f(x),0\}$

N.B. Fondamentali gli esercizi (*) e gli esercizi da 4.7 a 4.17

fondamentale la parabola e le diseq. di 2° grado

Non insistere troppo sulle f.ni periodiche

**Grafico di $f: A \to B$** $\overset{\equiv}{_{Def}}$ data una funzione $f: A \to B$

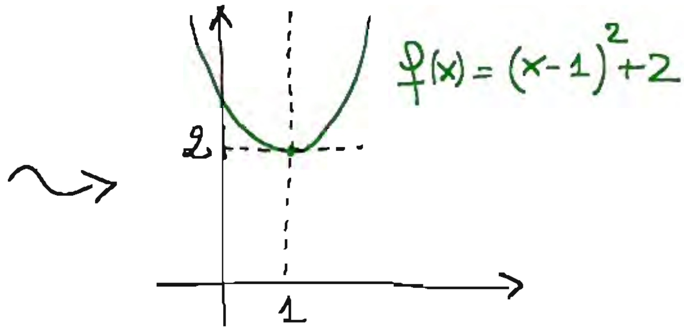
$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

- $\mathcal{G}(f)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

**QS** **Esempio** Data $f(x) = x^2 - 2x + 3$, che è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, questa si può scrivere

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2$$

Per disegnarne il grafico

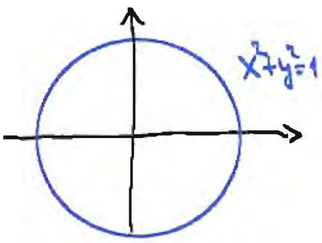




ovvero

- disegno di $g(x) = x^2$ (noto)
- disegno di $g(x-1) = (x-1)^2$ (traslazione rispetto a $x$)
- disegno di $f(x) = g(x-1) + 2$ (traslazione rispetto a $y$)

**Controesempio** L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\} = A$

NON È grafico di nessuna funzione: infatti,

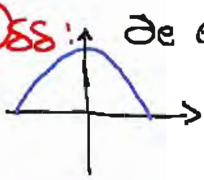



$$A = \{(x,y) : y = \sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1,1]\}$$
$$\cup \{(x,y) : y = -\sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1,1]\}$$
$$\Downarrow$$
$$A = \{(x, \sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\} \cup \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\}$$

$\exists\, \bar{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \exists\, y_1 = \frac{1}{2} \; y_2 = -\frac{1}{2}$ t.c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

(si osservi che una f.ne $f: A \to B$ soddisfa (*) $\boxed{\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \;\; f(x) = y}$, e nell'esempio abbiamo negato (*))

**Oss:** Se considero la semicirconferenza di figura,



questa è il grafico di $f: [-1,1] \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$

**dominio massimale di una funzione reale** $\underset{\text{Def}}{\equiv} \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$
**(o campo di esistenza)**

**Oss:** è l'insieme dove ha senso $f(x)$

**funzione debolmente crescente** $\equiv_{\text{Def}}$ $f: A \to B : \forall x,y \in A \quad x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

**" strettamente "** $\equiv_{\text{Def}}$ $f: A \to B \ \forall x,y \in A \ x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y)$

x<y implica f(x)<f(y)

**Esempio** $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

**dim** $\quad y^3 > x^3 \Longleftrightarrow \quad y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2) > 0$

utilizzando la divisione tra polinomi

Inoltre $\quad y^2 + xy + x^2 > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$

Ne segue che, $\forall (x,y) \neq (0,0) \qquad y^3 > x^3$ <u>sse</u> $y > x$

da cui segue la tesi ∎

**Oss:** $x^2+xy+y^2 > 0 \ \forall (x,y) \neq (0,0)$ **( UTILE SE FATTA DAL DOCENTE )**

Osservo che $\quad x^2+y^2+xy=0 \quad$ <u>sse</u> $\quad y = \frac{1}{2}\left(-x \pm \sqrt{-3x^2}\right) \notin \mathbb{R} \qquad x \neq 0$

dunque si tratta di stabilire il segno.

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Rightarrow x^2+y^2+xy \geq 3xy$$

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq -2xy \Rightarrow x^2+y^2+xy \geq -xy$$

e dunque $\quad x^2+y^2+xy \geq \max\{3xy, -xy\}$

ma $\max\{3xy, -xy\} > 0 \quad \forall x \neq 0, y \neq 0$, da cui segue

$$x^2+y^2+xy > 0 \quad \forall x \neq 0, y \neq 0$$

Quando $\quad x=0, y \neq 0 \qquad x^2+xy+y^2 = y^2 > 0$

" $\qquad x \neq 0 \quad y=0 \qquad x^2+xy+y^2 = x^2 > 0$

Ne segue la tesi $\qquad x^2+y^2+xy > 0 \quad \forall (x,y) \notin (0,0)$ ∎

**Esempio** $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ è debolmente crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

**dim.** Devo provare che $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x<y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

1) $x < y \le 0$

$f(y)-f(x) = 1-y^2-(1-x^2) = (x^2-y^2) = \overbrace{(x-y)}^{(A)}\overbrace{(x+y)}^{B} > 0$

Infatti $y \le 0$ e $x<y \Rightarrow \begin{cases} x-y<0 & (A) \\ x+y<0 & (B) \end{cases}$ da cui la tesi

2) $x \le 0 < y$

$f(y)-f(x) = 1-(1-x^2) = x^2 \ge 0$ da cui la tesi

3) $0 < x < y$

$f(y)-f(x) = 1-1 = 0 \ge 0$ da cui la tesi ∎

**funzione debolmente decrescente** $\underset{Def}{=}$ $f: A \to B$ $\forall x,y \in A$ $x<y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$

" **strettamente** " $\underset{Def}{=}$ $f: A \to B$ $\forall x,y \in A$ $x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$

**Esempio** $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$

**dim** $f(y)-f(x) = y^2-x^2 = (y-x)(y+x)$

ma $x<y$ $y \le 0 \Rightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ x+y<0 \end{cases} \Rightarrow (y-x)(y+x)<0 \Rightarrow f(y)-f(x)<0$ Tesi ∎

QS **Teorema** $f: A \to B$ strettamente crescente (decrescente)

$\Rightarrow f$ è iniettiva

**dim** sia $f$ strett. crescente: $\forall x,y \in A$ $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

$x \ne y \Rightarrow \left.\begin{matrix} ① \; x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \\ ② \; y<x \Rightarrow f(y)<f(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) \ne f(y)$ ∎

**Oss:** In alternativa si può dimostrare l'enunciato equivalente "non B $\Rightarrow$ non A" ovvero

$f$ non è iniettiva $\Rightarrow f$ non è $\begin{cases} \text{né strettamente crescente} \\ \text{" " decrescente} \end{cases}$. Infatti,

$f$ non iniettiva $\Rightarrow \exists\, x_1 \ne x_2 \in A$ : $f(x_1) = f(x_2)$

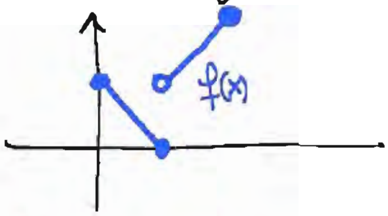
supponendo che $x_1 < x_2$ abbiamo $f(x_1) = f(x_2)$

e quindi $f$ NON È strettamente crescente (decrescente) ∎

Ma il Teorema precedente è una condizione solo Necessaria 

**Controesempio** $f: A \to B$ iniettiva $\not\Rightarrow$ $f$ strettamente crescente (decrescente)

presa $f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ x & 1 < x \le 2 \end{cases}$




questa è iniettiva (i due tratti sono grafici di funzioni iniettive)

Ma non è né crescente strett. né decrescente "

**l'insieme $-A$** $\equiv_{Def}$ Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, si definisce

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$$

**Esempio** Dato $A = [1,3[$, si ha $-A = ]-3,-1]$

Dato $B = ]-1,4]$, " " $-B = [-4,1[$

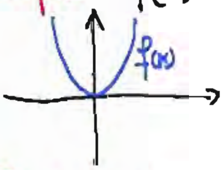
(un disegno può aiutare!)

**A insieme simmetrico (rispetto a $x=0$)** $\equiv_{Def}$ $A = -A$

**Esempio** $A = ]-3,3[ \Rightarrow A = -A = ]-3,3[$

**funzione pari** $\equiv_{Def}$ $f: A \to B$, con $A$ t.c. $A = -A$, si dice pari se $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in A$

**Esempio**: $f(x) = x^2$ $f: [-a,a] \to \mathbb{R}$ è una funzione pari




(il grafico è simmetrico rispetto all'asse $y$!!)

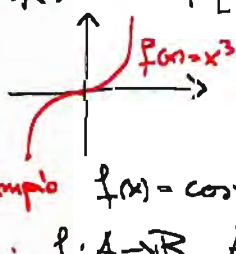
**Controesempio**: $f(x) = \log(1+x)$ $f: ]-1,+\infty[ \to \mathbb{R}$ non è pari

**Problema**: $f: A \to \mathbb{R}$, $A = -A$, $f$ pari $\overset{?}{\Rightarrow}$ esiste $f(0)$

**Risposta** NO: si prenda $f(x) = \log(x^2)$ $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**funzione dispari** $\equiv_{Def}$ $f: A \to B$, con $A$ t.c. $A = -A$ si dice dispari se $-f(x) = f(-x)$ $\forall x \in A$

**Esempio** $f(x) = x^3$ $f: [-a,a] \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari




Il grafico è simmetrico rispetto all'origine!!

**Controesempio** $f(x) = \cos x$ $f: [-2\pi, 2\pi]$ non è dispari

**Problema**: $f: A \to \mathbb{R}$ $A = -A$ $0 \in A$ $f$ dispari $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(0) = 0$

**Risposta**: SI poiché deve essere $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in A \Rightarrow f(0) = -f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$

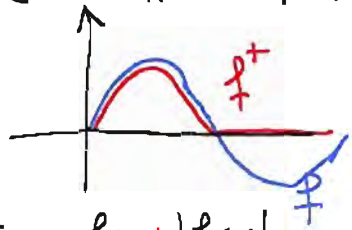
Parte positiva di $f \underset{Def}{\equiv}$ $f:A\to\mathbb{R}$, definiamo
$$f^+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$$

Osservazione $f^+(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$ (facile da provare)

Osservazione $f^+(x) = \max\{f(x),0\} \quad \forall x$ (non difficile da provare)

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x \quad x\in[0,2\pi]$

$$\Rightarrow \quad f^+(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0\leq x\leq \pi \\ 0 & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$




Parte negativa di $f \underset{Def}{\equiv}$ $f:A\to\mathbb{R}$ $\quad f^-(x) = \dfrac{-f(x)+|f(x)|}{2}$

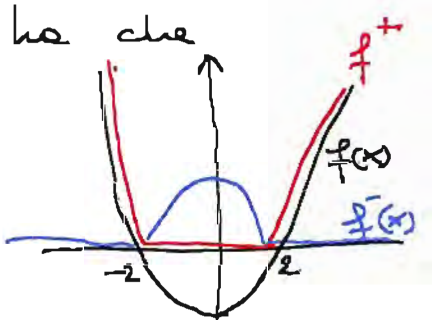
Osservazione $f^-(x) \geq 0 \quad \forall x$ (facile)

Osservazione $f^-(x) = \max\{-f(x),0\}$ (non difficile)

Esempio $f(x) = x^2-4$ si ha che

$$f^-(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x\in[-2,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f^+(x) = \begin{cases} x^2-4 & x\leq -2 \\ 0 & -2<x<2 \\ x^2-4 & 2\leq x \end{cases}$$




IMPORTANTE: $f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \forall x\in \operatorname{dom}(f)$

$|f(x)| = f^+(x)+f^-(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom}(f)$

Oss: Data $f:A\to\mathbb{R}$ con $A=-A$, si possono definire

$$f^p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad f^d(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

e si verifica

1) $f^p(x)$ è pari, $\forall f$
2) $f^d(x)$ è dispari, $\forall f$
3) $f^p(x)+f^d(x) = f(x)$
4) $f$ è pari $\Rightarrow f^p(x) = f(x)$ mentre $f^d(x)=0$
5) $f$ è dispari $\Rightarrow f^p(x)=0$ mentre $f^d(x) = f(x)$

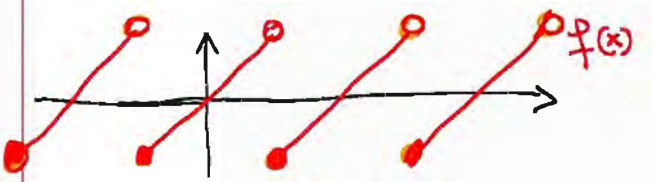
# Funzioni Periodiche 

Funzione periodica $\equiv_{Def}$ $f: A \to \mathbb{R}$ si dice "periodica di periodo $T (>0)$" se

1) $\forall x$ $x \in A$ se $x+T \in A$ (condizione sul dominio)

2) $\forall x \in A$ $f(x+T) = f(x)$ ( " sulla funzione)

Esempio: $f(x) = x - 2k$ $x \in [-1+2k, 1+2k[$ è periodica




$$f(x) = \begin{cases} \ldots \\ x-2 & \text{se } x \in [-3,-1[ \\ x & \text{se } x \in [-1,1[ \\ x+2 & \text{se } x \in [1,3[ \\ \ldots \end{cases}$$

Osservazione quando $A = \mathbb{R}$, la def. precedente si riduce al punto 2), ovvero $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T$

$\Rightarrow f$ periodica di periodo $2T$ $(3T, 4T, \ldots)$

(verifica diretta osservando che $f(x+2T) = f(x+T)$)

Problema $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $T$ periodica $\Rightarrow f$ è $T/2$ periodica?

Risposta: NO $f(x) = \operatorname{sen} x$ è $2\pi$ periodica, però

$$f(x+\pi) = \operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x \neq \operatorname{sen} x = f(x) \quad \forall x \neq 0, \pi$$

e dunque NON è $\pi$-periodica

Osservazione: ha senso parlare di minimo periodo $T$ per una funzione $f$, ma non è detto che questo minimo esista

Esercizio $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ è periodica? Se sì, quale è il suo minimo periodo?

dim $f(x+T) = \operatorname{sen}(3(x+T)) = \operatorname{sen}(3x + 3T)$

$$= \operatorname{sen} 3x \cos 3T + \operatorname{sen} 3T \cos 3x = \operatorname{sen} 3x = f(x)$$

dovrebbe valere $\forall x \in \mathbb{R}$

che equivale $\operatorname{sen} 3x (\cos 3T - 1) + \cos 3x \operatorname{sen} 3T = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

" " " $\begin{cases} \cos 3T = 1 \\ \operatorname{sen} 3T = 0 \end{cases}$ questo segue dall'indipendenza tra $\operatorname{sen} 3x$ e $\cos 3x$

" " " $3T = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $T = \frac{2\pi}{3} \cdot k$ $k \in \mathbb{Z}$

e dunque $\operatorname{sen} 3x$ è $\frac{2\pi}{3}$ periodica e $\frac{2\pi}{3}$ è il periodo minimo ▥

**Esercizio** la f.ne $f(x) = \sin 6x + \cos 3x$ è periodica?
Nel caso lo sia, ha minimo periodo?

**dim** È periodica di periodo $2\pi$ infatti

$f(x+2\pi) = \sin(6x + 12\pi) + \cos(3x + 6\pi) = f(x)$ in quanto

$\sin y$ e $\cos y$ sono $2\pi$-periodiche (e quindi $12\pi$ e $6\pi$ periodiche rispettivamente. Cerchiamo, se esiste, il minimo periodo $T$.

$$f(x+T) = \sin 6x \cos 6T + \sin 6T \cos 6x + \cos 3x \cos 3T - \sin 3x \sin 3T = \sin 6x + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \ \sin 6x(\cos 6T - 1) + \sin 6T \cos 6x + \cos 3x(\cos 3T - 1) - \sin 3x \sin 3T = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6T = 1 \\ \sin 6T = 0 \\ \cos 3T = 1 \\ \sin 3T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6T = 2k\pi \\ 6T = k\pi \\ 3T = 2k\pi \\ 3T = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = k \cdot \frac{\pi}{3} \\ T = k \cdot \frac{\pi}{6} \\ T = k\frac{2}{3}\pi \\ T = k \cdot \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

$\Rightarrow T = \max\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right\} = \frac{2}{3}\pi$ è il minimo periodo ////

**Oss:** Alternativamente potevo osservare che

$f(x) = 2 \sin 3x \cos 3x + \cos 3x$

e che $\sin 3x, \cos 3x$ hanno entrambe periodo $\frac{2}{3}\pi$

**Esercizio** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $T$ periodica

$\Rightarrow g(x) = f(3x)$ è $T/3$ periodica

$g(x) = f(x/3)$ è $3T$ periodica

**Esercizio** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f$ $T$ periodica e $g$ $T/k$ periodica (con $k \geq 2$ $k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow f+g$ è $T = \max\{T, T/k\}$ periodica

più difficile il seguente

**Teorema** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f$ $\frac{p}{q}$-periodica $g$ $\frac{\ell}{m}$-periodica

$\Rightarrow f+g$ è $p \cdot \ell$ periodica

**dim** il periodo di $f+g$ deve necessariamente essere multiplo di $\frac{p}{q}$ e di $\frac{\ell}{m}$, ovvero

" " $\frac{pm}{qm}$ e di $\frac{\ell q}{mq}$ ovvero (non voglio il minimo)

$$\text{mcm}\left\{\frac{pm}{qm}, \frac{\ell q}{qm}\right\} = \frac{pm\ell q}{qm} = p \cdot \ell \qquad ////$$

**NOTA BENE:** quando il rapporto dei periodi NON è razionale, questo non vale più

**Osservazione** $f$ è $\sqrt{2}$-periodica, $g$ è $2$-periodica ma $f+g$ non è periodica; il problema è il seguente: il rapporto tra $T_1=\sqrt{2}$ e $T_2=2$ NON è razionale

**Osservazione** il minimo periodo non sempre esiste

$$T=\inf\{P>0 : f(x+P)=f(x)\ \forall x\in \mathrm{dom}(f)\}$$

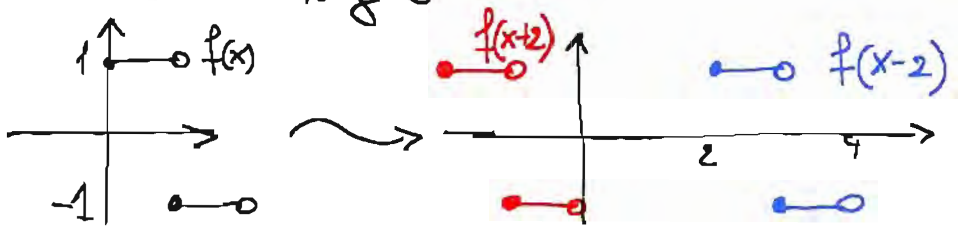
↑ questo è il minimo periodo

$f(x)=3\ \forall x\in\mathbb{R}$ f.ne costante, questa è $P$-periodica, $\forall P>0$

e dunque $T=$ min periodo $=0$ che non è accettabile

e dunque non esiste sempre

**Esempio** Data una funzione $f:[0,2[\to\mathbb{R}$, possiamo generare una funzione periodica definita su $\mathbb{R}$ procedendo come segue




$$\phi(x)=\begin{cases} \dots \\ f(x+2) & -2\le x<0 \\ f(x) & 0\le x<2 \\ f(x-2) & 2\le x<4 \\ \dots \end{cases} = \begin{cases} f(x-2k), \\ \forall x\in[2k,2k+2[ \\ \text{al variare di } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

**Problema** $f$ e $g$ di periodo $\underset{\text{minimo}}{T}$ $\Rightarrow \frac{f}{g}$ ha periodo $\underset{\text{minimo}}{T}$ ?

**No**: $f=\operatorname{sen}x$ $g=\cos x$ hanno periodo $2\pi$ ma $\frac{f}{g}$ ha periodo $\pi$

**Problema** $f$ di periodo $\underset{\text{minimo}}{T}$ $\Rightarrow |f|$ ha periodo $\underset{\text{minimo}}{T}$ ?

**No**: $f=\operatorname{sen}x$ ha periodo $2\pi$ ma $|f|$ ha periodo $\pi$

**Esercizio** Determinare il minimo periodo di $f(x)=\operatorname{sen}5x+\cos 3x$

**R**: $\mathrm{mcm}\left(\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{3}\right)=\mathrm{mcm}\left(\frac{6}{15}\pi\,;\frac{10}{15}\pi\right)=\frac{60}{15}\pi=4\pi=T$ minimo !

**Esercizio 1.28** : trovate il dominio naturale delle seguenti funzioni (eventualmente dopo la lettura del capitolo 3):

a) $\sqrt{x-2}$
b) $\sqrt{|x-2|}$
c) $\sqrt{|x|-2}$
d) $\sqrt{\log x + 1}$
e) $\log(\sqrt{x^2-6x+5})$
f) $\operatorname{sen}(x-\sqrt{1-2x})$

a) $f(y)=\sqrt{y}$ ha come dominio l'insieme $[0,+\infty[\,=B$
$g(x)=x-2$ " " " " $\mathbb{R}=A$
$\sqrt{x-2}=f(g(x))=h(x)$ $\quad A\xrightarrow{g}\mathbb{R} \quad B\xrightarrow{f}\mathbb{R}$
Il dominio di $h\equiv g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : x-2\geq 0\}$
$=[2,+\infty[$

b) $f(y)=\sqrt{y}$ $\quad f:B\to\mathbb{R} \quad B=[0,+\infty[$
$g(x)=|x-2|$ $\quad g:A\to\mathbb{R} \quad A=\mathbb{R}$
$h(x)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$
Il dominio di $h\equiv g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : |x-2|\geq 0\}\equiv\mathbb{R}$

c) $f(y)=\sqrt{y}$ $\quad f:B\to\mathbb{R} \quad B=[0,+\infty[$
$g(x)=|x|-2$ $\quad g:A\to\mathbb{R} \quad A=\mathbb{R}$
$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{|x|-2}$
il dominio di $h\equiv g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : |x|-2\geq 0\}$
$=\{\ " : |x|\geq 2\}$
$=]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

d) $f(y)=\sqrt{y}$ $\quad f:B\to\mathbb{R} \quad B=[0,+\infty[$
$g(x)=1+\log x$ $\quad g:A\to\mathbb{R} \quad A=]0,+\infty[$

$h(x)=\sqrt{1+\log x}=f(g(x))$
il dominio di $h=g^{-1}(B)=\{x\in A : g(x)\geq 0\}$
$=\{x\in]0,+\infty[ : 1+\log x\geq 0\}$
$=\{x\in]0,+\infty[ : \log x\geq -1=\log\frac{1}{e}\}$
$=\{x\in]0,+\infty[ : x\geq\frac{1}{e}\}$
$=[\frac{1}{e},+\infty[$

e) $g(x) = \log\left(\sqrt{x^2-6x+5}\right) = f(g(h(x)))$ 10

$h(x) = x^2-6x+5$ $\quad h: A \to \mathbb{R} \quad A = \mathbb{R}$

$g(y) = \sqrt{y}$ $\quad g: B \to \mathbb{R} \quad B = [0,+\infty[$

$f(z) = \log(z)$ $\quad f: C \to \mathbb{R} \quad C = ]0,+\infty[$

$A \xrightarrow{h} \mathbb{R} \quad B \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad C \xrightarrow{h} \mathbb{R}$

il dominio di $q(x) = \{x \in A : g(h(x)) > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-6x+5} > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x^2-6x+5 > 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-5) > 0\}$

$= ]-\infty, 1[ \cup ]5, +\infty[$

f) $\operatorname{sen}\left(x - \sqrt{1-2x}\right) = q(x) = h(g(x) - f(p(x)))$

$f(y) = \sqrt{y} \quad g(x) = x \quad p(x) = 1-2x$

$\operatorname{dom} q = \{x \in \mathbb{R} : g(x) - f(p(x)) \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : f(p(x)) \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 1-2x \geq 0\}$

$= \{ \text{''} \quad : \tfrac{1}{2} \geq x\} = ]-\infty, \tfrac{1}{2}]$ ▨

Esercizio 3.3 : negate la proposizione " $f$ è decrescente" debolmente

**dim** Bisogna scrivere in altro modo

non ($f: A \to \mathbb{R}$ debolmente decrescente)

non ($\forall x,y \in A,\ x<y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$)

non ($\forall x,y \in A,\ x \geq y \vee f(x) \geq f(y)$)

$\exists \bar{x},\bar{y} \in A$ : non ($x \geq y \vee f(x) \geq f(y)$)

$\exists \bar{x},\bar{y} \in A$ : $x<y$ e $f(x)<f(y)$

Esercizio 3.4 : negate la proposizione " $f$ è strettamente monotona".

**dim** Bisogna scrivere in modo diverso

non ($f: A \to B$ è strettamente monotona)

non ($f: A \to B$ è (strett. crescente) $\vee$ (strettamente decrescente))

[non ($f$ strett. crescente)] e [non ($f$ strett. crescente)] decrescente

$\left[\text{non}\left(\forall x,y\in A \;\; x<y \Rightarrow f(x)<f(y)\right)\right]$ e $\left[\text{non}\left(\forall x,y\in A \;\; x<y \Rightarrow f(x)>f(y)\right)\right]$

$\left[\exists \bar{x},\bar{y}\in A : \bar{x}<\bar{y} \text{ e } f(\bar{x})\geq f(\bar{y})\right]$ e $\left[\exists \tilde{x},\tilde{y}\in A : \tilde{x}<\tilde{y} \text{ e } f(\tilde{x})\leq f(\tilde{y})\right]$ ∎

**Esercizio 3.6** : provate, con degli esempi, che la somma di due funzioni iniettive non sempre è iniettiva, e che lo stesso vale per la somma di due funzioni surgettive o due biunivoche (questo mostra l'importanza della proposizione 3.1)

Prop. 3.1 "$f: A\to B$ strett. monotona $\Rightarrow$ $f$ iniettiva"

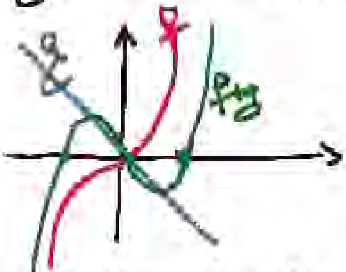
Proviamo che (la prop. 3.1 non si inverte!)

$f,g: A\to B$ iniettive $\not\Rightarrow$ $f+g: A\to B$ iniettiva

$f(x)=x^3$ $\quad g(x)=-x$ sono iniettive da $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ma

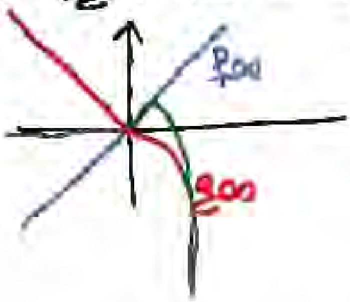
$f+g=x^3-x$ NON È INIETTIVA : infatti $(f+g)(1)=0=(f+g)(-1)$




$f,g: A\to B$ suriettive $\not\Rightarrow$ $f+g: A\to B$ suriettiva

$f(x)=x$

$g(x)=\begin{cases} -x & \text{se } x<0 \\ -x^2 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$




$f+g=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ x-x^2 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$ che non è suriettiva poiché $x-x^2<2 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$

$f,g: A\to B$ biiettive $\not\Rightarrow$ $f+g: A\to B$ BIIETTIVA

Esempio $f(x)=x$ è biiettiva da $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g(x)=3-x$ biiettiva " $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ma $f+g=3$ che NON È BIIETTIVA

(è costante!)

**Esercizio 3.8** : quali sono le funzioni che sono contemporaneamente debolmente crescenti e debolmente decrescenti?

dim $f: A \to \mathbb{R}$ deve essere tale che

$$\forall x,y \in A, [x<y \Rightarrow f(x) \le f(y)] \text{ e } [x<y \Rightarrow f(x) \ge f(y)]$$

ovvero

$$\forall x,y \in A, [x<y \Rightarrow (f(x) \le f(y) \text{ e } f(x) \ge f(y))]$$

ovvero

$$\forall x,y \in A, [x<y \Rightarrow f(x) = f(y)]$$

ovvero le costanti

**Esercizio 3.11** : provate che una funzione è dispari se e solo se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Trovate poi le funzioni pari e dispari tra quelle disegnate nella sezione 4.2.

dim Dovendo essere $-f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ si ha che
$(x, f(x)) \in \mathcal{G}(f)$ sse $(-x, -f(x)) \in \mathcal{G}(f)$

**Esercizio 3.12.**: dite se la funzione $\arctan(2x - x^3)$ è pari o se è dispari.

$f(x) = \operatorname{arctg}(2x - x^3)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(0) = 0$

$$f(-x) = \operatorname{arctg}(2(-x) - (-x)^3) = \operatorname{arctg}(-(2x - x^3))$$

↓ sfruttando la disparità dell'arctg

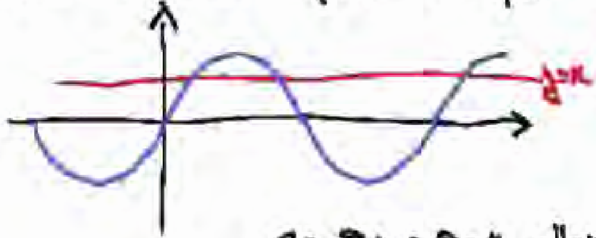
$$= -\operatorname{arctg}(2x - x^3) = -f(x)$$

Si è utilizzato il fatto che $g(y) = \operatorname{arctg}(y)$ è dispari!

**Esercizio 3.34** : provate che una funzione periodica non è mai iniettiva.

dim

Prendendo come riferimento $f(x) = \sin x$, si vede che




$\sin x = k$ con $k \in [-1, 1]$ ha $\infty$ soluzioni in quanto se $\theta: \sin\theta = k$ allora $\sin(\theta + 2h\pi) = k\ \forall h \in \mathbb{Z}$

e dunque non può essere iniettiva

IN GENERALE sia data $f(x)$ periodica, ovvero

$$\exists T>0 : f(x+T\cdot h) = f(x) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

Se $f(x)=k$ allora $f(x+hT)=f(x)=k \quad \forall h\in\mathbb{Z}$

da cui segue che $f$ NON È INIETTIVA

**Esercizio 4.8** : determinate graficamente l'immagine della seguente funzione:

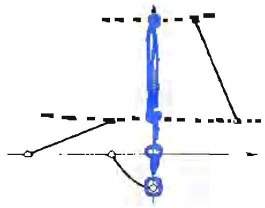


Fig. 4.56 : un grafico di funzione

Prendiamo
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{3}{2} & -3<x\leq -1 \\ x^2-1 & -1<x<0 \\ 5-x & 1\leq x<4 \end{cases}$$

$$f(]-3,0[\cup[1,4[) = ]-1,0[\cup]0,1]\cup]1,4]$$

$$= ]-1,0[\cup]0,4]$$

# Parabola e disequazioni di 2° grado

Conviene far osservare che l'equazione di 2° grado

(*) $x^2 + c = 0 \iff x^2 = -c \iff x_{1,2} = \sqrt{-c}$ che ha soluzioni se $c \leq 0$

L'equazione $ax^2+bx+c=0$ si può scrivere

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

e quindi ha le stesse soluzioni di

$$(**)\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Per risolvere (**) mi riconduco a (*) e quindi

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

(completamento del Trinomio) e quindi

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{|2a|}\sqrt{b^2-4ac} \qquad (\text{ma } \pm|2a|=\pm 2a)$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ e questa ha soluzioni

① ≠ se $b^2>4ac$ ② = se $b^2=4ac$ ③ complesse coniugate se $b^2>4ac$

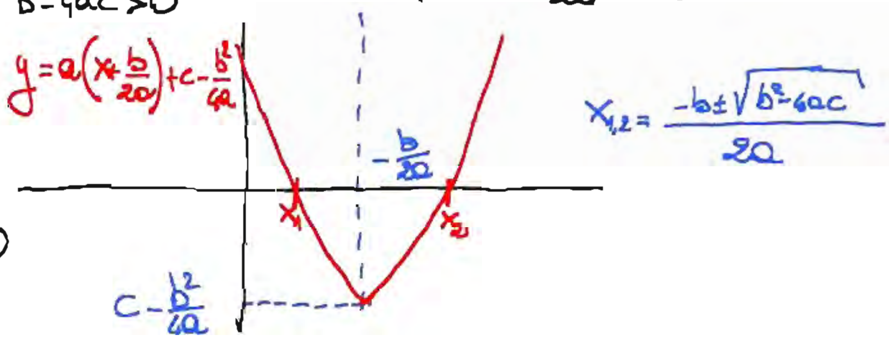
Data la parabola $y=ax^2+bx+c$, questa si scrive

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

Ⓐ Nel caso $\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$ (ed ho posto $\frac{b}{2a}<0$)

si ha

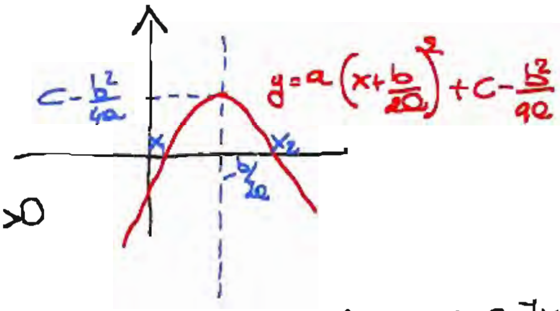
$$\frac{b^2-4ac}{4a}=c-\frac{b^2}{4a}<0$$



e dunque si scopre che $y(x)\begin{cases} >0 & x\notin[x_1,x_2] \\ <0 & x\in\,]x_1,x_2[ \end{cases}$

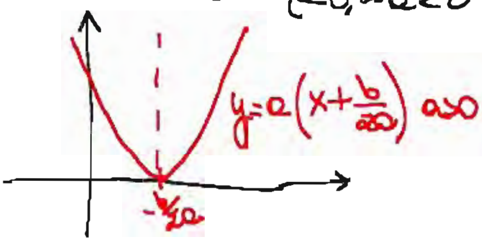
(B) Nel caso $\begin{cases} a<0 \\ b^2-4ac>0 \end{cases}$ il disegno è $\left(\frac{b}{2a}<0\right)$

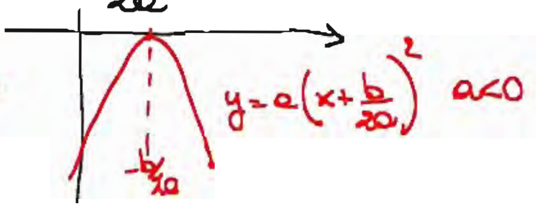
si ha $\frac{4ac-b^2}{4a}=c-\frac{b^2}{4a}>0$




e dunque scopro $y(x)\begin{cases} >0 & x\in\,]x_1,x_2[ \\ <0 & x\notin[x_1,x_2] \end{cases}$

(C) Quando $c-\frac{b^2}{4a}=0$ si ha $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ e si ha che $y(x)\begin{cases} >0, \text{ se } a>0 & \forall x\neq-\frac{b}{2a} \\ <0, \text{ se } a<0 & \forall x\neq-\frac{b}{2a} \end{cases}$

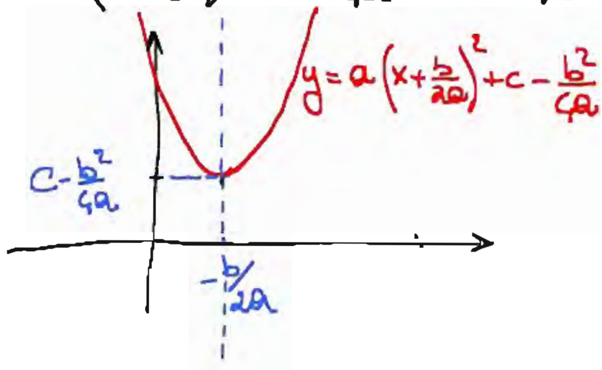



3) Quando $\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases} \Rightarrow c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}>0$

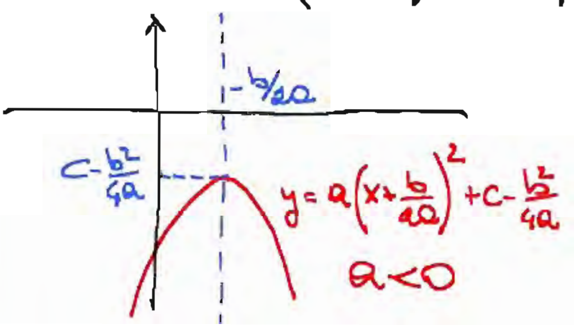
$$\Rightarrow y(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\geq c-\frac{b^2}{4a}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

disegno

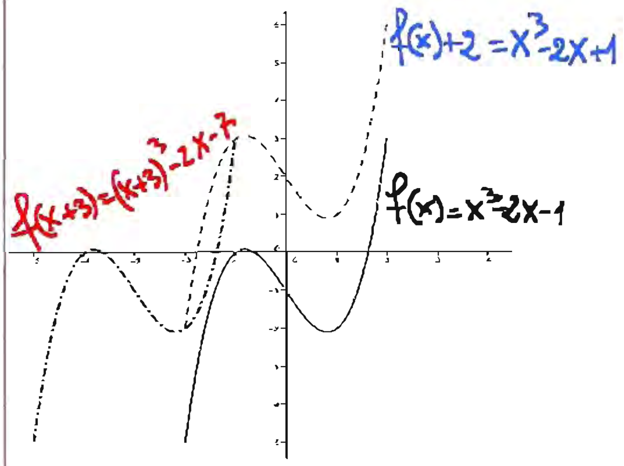



3) Quando $\begin{cases} a<0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases} \Rightarrow c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}<0$

$$\Rightarrow y(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}\leq c-\frac{b^2}{4a}<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$



# Traslazione verticale e orizzontale

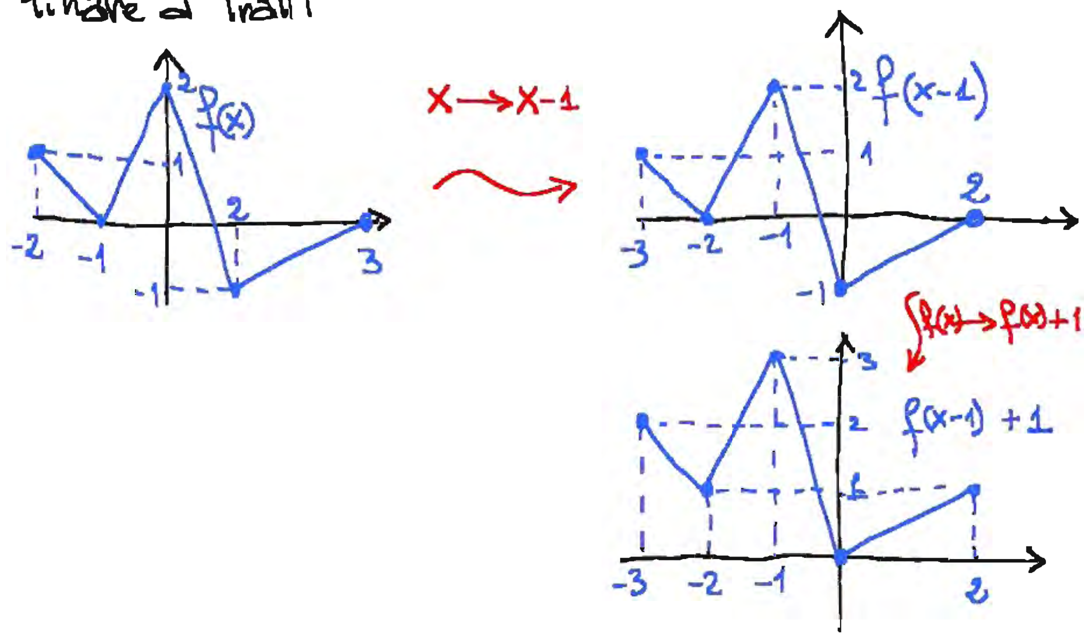



Chiarire bene come si passa da $f(x)$

alla funzione $f(x)+k \quad k\in\mathbb{R}$

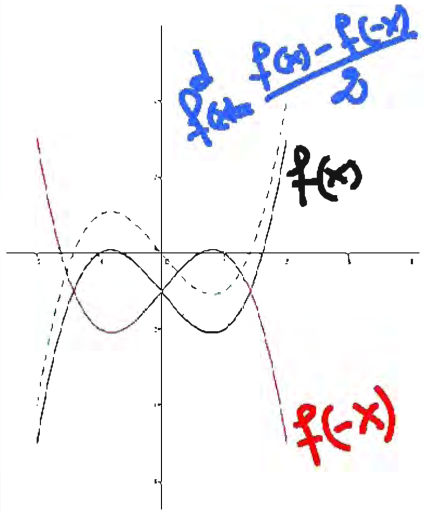
alla funzione $f(x+h) \quad h\in\mathbb{R}$

L'esempio più semplice è forse con una funzione lineare a tratti



# Costruzione della disparizzata $f^d(x)$



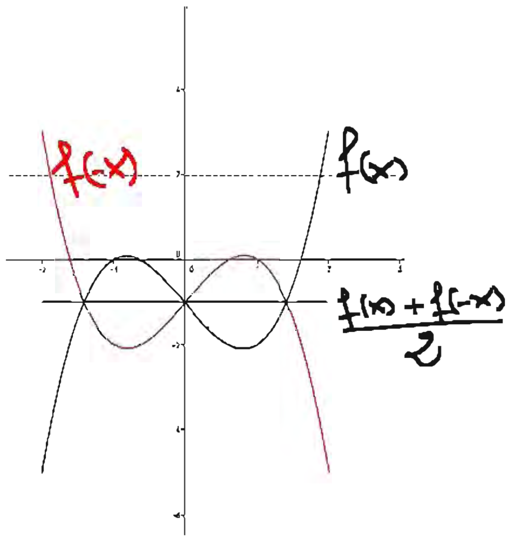



In questa figura si vede l'andamento di

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

insieme agli andamenti di $f(x)$ e di $f(-x)$

# Costruzione della parizzata $f^p(x)$




Andamento di

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

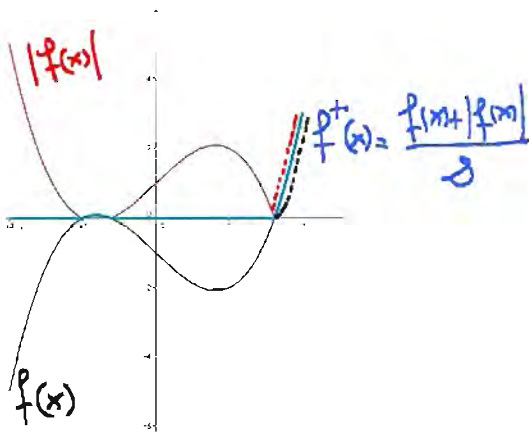
Problema: quale è il grafico di $\left(f(x)+f(-x)\right)\cdot\frac{1}{2}$

- quando $f(x)$ è pari?
- quando $f(x)$ è dispari?

Problema: quale è il grafico di $\left(f(x)-f(-x)\right)\cdot\frac{1}{2}$

- quando $f(x)$ è pari?
- quando $f(x)$ è dispari?

# Costruzione della parte positiva $f^+(x)$



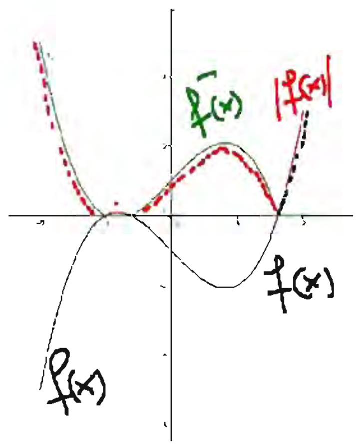

Questo è il grafico della parte positiva

$$f^+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$$

Si osservi che

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

# Costruzione della parte negativa $f^-(x)$




Questo è il grafico della parte negativa di $f$

$$f^-(x) = \frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$

Si osservi che

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$