Algebra (4 ore)

Numeri reali

Numeri razionali: assiomi $+$; $\cdot$; distributiva; ordine totale

Legge dell'annullamento del prodotto

Teorema Fondamentale dell'Algebra

" di Ruffini

Divisione tra polinomi

Esercizi

Appendice: radici razionali e irrazionalità di $\sqrt{2}$

N.B. Fondamentale Teorema Ruffini, divisione tra polinomi, Esercizi, radici razionali polinomio (quest'ultimo va enunciato almeno con un esempio di equazione $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ in cui cerco i divisori di a_n e di a_0)

1

I numeri reali $\mathbb{R} \equiv_{Def}$ $\mathbb{R}$ è un insieme numerico che soddisfa l'assioma di Dedekind (di completezza) insieme a tutti gli assiomi dei numeri razionali

I numeri razionali $\mathbb{Q} \equiv_{Def}$ sono i numeri della forma a/b con $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sono definite le operazioni

$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ associativa $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$

commutativa $x+y = y+z$ $\forall x,y \in \mathbb{Q}$

$\exists$ elemento neutro: 0 $x+0=0+x=x$ $\forall x \in \mathbb{Q}$

$\exists$ opposto $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y=-x \in \mathbb{Q} : x+y=y+x=0$

$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ associativa $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$

commutativa $x \cdot y = y \cdot x$ $\forall x,y \in \mathbb{Q}$

$\exists$ elemento neutro: 1 $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ $\forall x \in \mathbb{Q}$

$\exists$ inverso $\forall x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}\ \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} : x \cdot y = y \cdot x = 1$

Proprietà distributiva

$$(x+y)\cdot z = xz + yz = zx + zy = z(x+y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{Q}$$

Ordine totale $\leq$

(ovvero $\forall x,y \in \mathbb{Q}$ vale 1! tra le seguenti eventualità

$x<y$ ó $x=y$ ó $x>y$

aut, ovvero or esclusivo)

$x \leq y$ $\underline{\text{sse}}$ $0 \leq y-x$ $\forall x,y \in \mathbb{Q}$

l'ordine soddisfa i seguenti assiomi

(i) $x \leq y$ e $z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+z \leq y+z$

(ii) $x \leq y$ e $z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Oss: 0 è elemento assorbente in $\mathbb{Q}$: $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \ \forall x \in \mathbb{Q}$

(infatti: $0 \cdot x = (2-2) \cdot x = 2x - 2x = 0$

-2 opposto di 2 ↑distributiva ↑-2x è l'opposto di 2x

Risolvere le equazioni in $\mathbb{Q}$ si procede utilizzando gli assiomi

(1) $x + a = b$ sse $x + a + (-a) = b + (-a)$

sse $x = b - a \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}$

(2) $x \cdot a = b$ sse $x \cdot a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = b \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$ se $a \neq 0$

sse $x = \frac{b}{a}$ se $a \neq 0$

N.B. importante osservare che nel caso (1) non servono ipotesi, mentre in (2) è essenziale $a \neq 0$. Si utilizzano l'esistenza dell'elemento neutro e l'esistenza dell'opposto (inverso quando $a \neq 0$)

N.B. Fare osservare che

$$x = a \Longleftrightarrow x \leq a \text{ e } x \geq a$$

Legge dell'annullamento del prodotto

$a \cdot b = 0$ sse $a = 0$ o $b = 0$

che equivale a

$a \cdot b \neq 0$ sse $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Ovviamente vale la seguente forma più generale

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \Longleftrightarrow A(x) = 0 \text{ o } B(x) = 0$$

Proprietà delle potenze:

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$$

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$$

$$A^\alpha B^\alpha = (A \cdot B)^\alpha$$

$$\forall A, B > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Teorema (fondamentale dell'algebra)

Dato $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

con $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ t.c. $P(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$

Oss: non è detto che le n radici siano tutte distinte

Esempio $P_n(x) = (x-1)^{100}$ una sola radice $\bar{x} = 1$ con molteplicità algebrica 100

Teorema (di Ruffini)

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n

Se $P(a) = 0$ allora esiste $Q(x)$ di grado $n-1$ tale che $P(x) = Q(x)(x-a)$

Nota Bene (Importante) Per calcolare il polinomio $Q(x)$ nel Teorema di Ruffini si deve dividere $P(x)$ per il binomio $(x-a)$ dove $P(a) = 0$.

Questo calcolo va fatto utilizzando la divisione tra polinomi, e non la cosidetta "Regola di Ruffini"

Esempio $P(x) = x^3 - 8$ Si osserva che i divisori di 8 sono $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$, ed inoltre $P(2) = 2^3 - 8 = 0$. Dunque, per il Teorema di Ruffini, $(x-2)$ divide $(x^3 - 8)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & 0 & 0 & -8 & x-2 \\
\cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & x^2 - 2x + 4 \\
\cline{1-4}
// & 2x^2 & 0 & -8 & \\
 & 2x^2 & -4x & & \\
\cline{2-4}
 & // & 4x & -8 & \\
 & & 4x & -8 & \\
 & & & // &
\end{array}
$$

ovvero

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 - 2x + 4)$

(si osservi che $x^2 - 2x + 4 = 0$ non ha soluzioni reali in quanto $\Delta = 4 - 16 < 0$)

Esercizio Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \quad ?$$

dim. Perché abbia senso l'identità, è necessario che ambo i membri siano definiti ovvero è necessario che

$$\boxed{a \neq 0, \; b \neq 0 \quad e \quad a+b \neq 0}$$

Sotto queste ipotesi, l'identità $(*)$ equivale a

$$\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{1}{a+b}.$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per $a \cdot b \cdot (a+b)$, si ottiene

$$(a+b)^2 = ab$$

ovvero $a^2+b^2+2ab = ab$

ovvero $a^2+b^2+ab = 0$

Dividendo tutto per b^2

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

da cui, posto $x = \frac{a}{b}$, si arriva all'equazione

$$x^2 + x + 1 = 0$$

che non ha soluzioni reali, in quanto

$$\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

Dunque $\nexists\, a, b \in \mathbb{R}$ che soddisfano $(*)$! ■

S **Esercizio 2.2** : dite quali fra le seguenti operazioni sono corrette:

$$\frac{\frac{x}{2}}{3} = \frac{2x}{3}, \qquad \frac{2+x}{2y} = \frac{1+x}{y}, \qquad \frac{\sqrt{3(1+a^2)}}{3} = \sqrt{1+a^2}, \qquad \frac{x}{x} = 1.$$

Falsa — Falsa — Falsa — Verificato

quali tra le seguenti sono delle identità

QS **Esercizio 2.3** : semplificate l'espressione

$$\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}}\left(2+\frac{a^2-b^2-c^2}{bc}\right)+\frac{(a+b)^2}{2bc}.$$

QS **Esercizio 2.4** : risolvete le seguenti equazioni:

a) $(a+1)x - 7a = 2a - 3x$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

c) $x^2 - 5x + 7 = 1$

d) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$.

← a) va fatto dal docente

dim (2.4) a) $(a+1)x - \cancel{7a} + 3x + \cancel{7a} = 2a \cancel{-3x} \cancel{+3x} + 7a$

$$x(a+1+3) = 9a$$

$$x(a+4)\cdot\frac{1}{a+4} = 9a\cdot\frac{1}{a+4} \quad \forall a \neq -4$$

$$x = \frac{9a}{a+4} \quad \forall a \neq -4$$

b) $x^2 - x - 6 = 0$

1° modo $x^2 - x + (-3)\cdot(+2) = 0$

$$\iff x^2 + (-3+2)\cdot x + (-3)\cdot(+2) = 0$$

$$\iff x^2 - 3x + 2x + (-3)\cdot(+2) = 0$$

$$\iff x(x-3) + 2(x-3) = 0$$

$$\iff (x-3)(x+2) = 0 \quad (*)$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto $(*)$ equivale a $x-3=0$ o $x+2=0$

ovvero $x_1 = 3$ o $x_2 = -2$

2° modo: $x^2 - x - 6 = 0 \iff x^2 - x = 6$

$$\iff x^2 + 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot x + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} + 6$$

$$\iff x - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+24}{4}}$$

$$\iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+24} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\iff x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

3° modo: $x^2 - x - 6 = 0 \, (*)$ i divisori di -6 sono $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

Le soluzioni intere di $(*)$ sono da cercare tra i divisori del termine noto -6, e dunque tra $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

Si osserva che $(-2)^2-(-2)-6=4+2-6=0$

ovvero $x_1=-2$ è soluzione di $(*)$

Ma allora per il teorema di Ruffini $(x+2)$ divide x^2-x-6

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-6 & x+2 \\ \hline x^2+2x & x-3 \\ \hline // \ -3x-6 & \\ -3x-6 & \\ \hline // & \end{array}$$

ovvero $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ e dunque ritrovo, per la legge dell'annullamento del prodotto, $x_1=-2$ o $x_2=3$

c) $x^2-5x+7=1 \iff x^2-5x+7+(-1)=1+(-1)$

$\iff x^2-5x+6=0$

(utilizzando la formula risolutiva) $\iff x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} = \dfrac{5\pm1}{2}$

$\iff x_1=2$ o $x_2=3$

d) $x^6-3x^3+2=0$ $(*)$

1° modo (eq. biquadratiche) Si pone $t=x^3$, e l'equazione risulta equivalente al sistema

$$\begin{cases} t=x^3 \\ t^2-3t+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t=x^3 \\ (t-2)(t-1)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_1=x^3 \\ t_1=2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} t_2=x^3 \\ t_2=1 \end{cases} \iff x_1=\sqrt[3]{2} \text{ o } x_2=1$$

2° modo: $x^6-3x^3+2=0$ $(*)$

Le soluzioni intere di $(*)$ si trovano tra i divisori di 2, ovvero appartengono all'insieme $\{\pm1,\pm2\}$

Non è difficile provare che $1^6-3\cdot1^3+2=0$ ovvero posto $P(x)=x^6-3x^3+2$ si ha $P(1)=0$

e dunque $x-1$ divide $P(x)$ x Thm. di Ruffini

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 \quad 0 \quad 0 \quad -3x^3 \quad 0 \quad 0 \quad +2 & x-1 \\
\hline
x^6 - x^5 & x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2 \\
\hline
// \quad x^5 \quad 0 \quad -3x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad x^5 - x^4 & \\
\hline
// \quad x^4 - 3x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad x^4 - x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\hline
// \; -2x^3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad -2x^3+2x^2 & \\
\hline
// \; -2x^2 \quad 0 \quad 2 & \\
\quad -2x^2+2x & \\
\hline
\quad -2x+2 & \\
\quad -2x+2 & \\
\hline
\quad // &
\end{array}
$$

ovvero

$$x^6-3x^3+2=(x-1)(x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2)$$

Ora le soluzioni intere di

$$x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2=0$$

sono da cercare tra i divisori di 2, ovvero in $\{\pm 1, \pm 2\}$

dove non se ne trovano.

Si ha che $(\sqrt[3]{2})^5+(\sqrt[3]{2})^4+(\sqrt[3]{2})^3-2(\sqrt[3]{2})^2-2\sqrt[3]{2}-2$

$$= \cancel{2}\cdot 2^{2/3} + \cancel{2\cdot 2^{1/3}} + \cancel{2} - \cancel{2}\cdot 2^{2/3} - \cancel{2\cdot 2^{1/3}} - \cancel{2} = 0$$

ovvero $x-\sqrt[3]{2}$ divide $x^5+x^4+x^3-2x^2-2x-2$

etc. $\blacksquare$

N.B. in d) non ha molto senso procedere nel secondo modo: come si può indovinare che $P(\sqrt{3})=0$

Esercizio 2.5 : risolvete l'equazione

S

$$\frac{(2x^2+4)^2}{x(x^2-1)(x^2-4)} = 0 \,. \qquad (*)$$

Perché abbia senso l'equazione è necessario che

$x\neq 0$, $x^2-1\neq 0$, $x^2-4\neq 0$

ovvero $x \notin \{0, \pm 1, \pm 2\}$

Quando $x \notin \{0, \pm 1, \pm 2\}$ l'equazione $(*)$ equivale

$$(2x^2+4)^2=0$$

che <u>non</u> <u>ha</u> soluzioni ||||

Esercizio 2.6 : risolvete i seguenti sistemi di equazioni:

OS a) $\begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x^2+4x-5)(x^2-3ax+2a^2)=0 \\ x^2-2ax=x-2a \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^4-3x^2+2=0 \\ x^4-5x^2+6=0 . \end{cases}$

b) va fatta dal docente

Risolvere un sistema $\begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{cases}$ significa determinare, se ne esistono, i valori

$$x\in A\cap B, \quad \text{dove } A=\{x: A(x)=0\} \quad B=\{x: B(x)=0\}$$

a) $2x+1=0$ ha come unica soluzione $x=-\frac{1}{2}$

ma $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = \frac{1}{4}+1+1\neq 0$

e dunque il sistema a) non ha soluzioni

b) Il sistema è equivalente (= ha le stesse soluzioni) del seguente

$$\begin{cases} (x^2+4x-5)(x^2-3ax+2a^2)=0 & (i) \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 & (ii) \end{cases}$$

Questo sistema equivale al seguente (legge dell'annullamento del prodotto)

$$\begin{cases} x^2+4x-5=0 \ \text{ o } \ x^2-3ax+2a^2=0 \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 \end{cases}$$

ovvero equivale a (infatti $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$)

$$b_1)\begin{cases} x^2+4x-5=0 \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_2)\begin{cases} x^2-3ax+2a^2=0 \\ x^2-x(2a+1)+2a=0 \end{cases}$$

ovvero

$$b_1)\begin{cases} (x+5)(x-1)=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \quad \text{o} \quad b_2)\begin{cases} (x-2a)(x-a)=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases}$$

$b_1)$ è soddisfatto da $x=1$ e, quando $a=-5/2$, da $x=-5=2a$

$b_2)$ è soddisfatto da $x=2a$ e quando $a=1$, da $x=1=a$

Dunque b) è soddisfatto da $\{x=2a : a\in\mathbb{R}\}$

($x=1$ e $x=-5$ stanno in questo insieme)

Oppure $b_1)$ o $b_2)$ sono equivalenti a

$$\begin{cases} x+5=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-1=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-2a=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-a=0 \\ (x-2a)(x-1)=0 \end{cases}$$

$x=-5=2a$ $a=-\frac{5}{2}$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $x=2a$ $\quad$ $x=1=a$ $a=1$

e si osserva che $2a, 1, -5 \in \{2a : a \in \mathbb{R}\}$

c) $\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} (x-2)(x-1)=0 \\ (x-3)(x-2)=0 \end{cases}$

e l'unica soluzione comune alle due equazioni è $\boxed{x=2}$

d) $\begin{cases} x^4-3x^2+2=0 \\ x^4-5x^2+6=0 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} (x^2-2)(x^2-1)=0 \\ (x^2-3)(x^2-2)=0 \end{cases}$ che equivale a

$\begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-1)(x+1)=0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0 \end{cases}$ che, per l'annullamento del prodotto, equivale a

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}=0 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+\sqrt{2}=0 \\ \text{''} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-1=0 \\ \text{''} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1=0 \\ \text{''} \end{cases}$$

$x=\sqrt{2}$ $\quad$ $x=-\sqrt{2}$ $\quad$ $\emptyset$ sol $\quad$ $\emptyset$ sol

e quindi le soluzioni sono $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$ ////

Per risolvere il prossimo esercizio è necessario provare che

Proposizione: $x \le y$ e $z<0 \Rightarrow x \cdot z \ge yz$

dim gli assiomi dell'ordine dicono che

$a \le b \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow a+c \le b+c \quad$ (i)

$a \le b \quad c > 0 \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c \quad$ (ii)

Sia $z<0$: allora $-z>0$

$$x \le y \text{ e } -z>0 \overset{(ii)}{\Longrightarrow} -xz \le -yz$$
$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} xz-yz \ge 0$$
$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} xz \ge yz \quad \text{cioè la Tesi}$$

S

Esercizio 2.7 : dite (senza servirvi della calcolatrice, naturalmente) quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$\underbrace{\frac{2}{3} < \frac{3}{2}}_{}, \qquad -\frac{1}{5} < -1, \qquad \frac{1}{2} \le \frac{2}{4}, \qquad \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \ge 1$$

i) vera   ii) falsa   iii) vera   iv) vera

Quando $a,b,c,d>0$, si ha che

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \text{ sse } 0 \le \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \text{ sse } 0 \le \frac{cb}{db} - \frac{ad}{bd}$$

$$\text{sse } 0 \le \frac{bc-ad}{bd} \quad \text{ma } bd>0$$

$$\text{sse } 0 \le bc - ad$$

$$\text{sse } ad \le bc$$

ovvero $\left(\text{"} \frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \text{ sse } ad \le bc \text{"} \right)$ va fatta dal docente

i) $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ sse $4 \le 9$ e quest'ultima è vera!!

ii) $-\frac{1}{5} < -1$ sse $-1 + \frac{1}{5} > 0$ sse $-\frac{4}{5} > 0$ Assurdo!

Dunque la ii) è falsa

(si poteva osservare che $-\frac{1}{5} < -1$ sse $\frac{1}{5} > 1$ sse $1 > 1 \cdot 5$ Assurdo)

iii) $\frac{1}{2} \le \frac{2}{4}$ sse $\frac{1}{2} \le \frac{\cancel{2}^{1} \cdot 1}{\cancel{2}_{1} \cdot 2}$ sse $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ Vera!

iv) $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \ge 1$ sse $\frac{1}{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} \ge 1$ sse $\frac{1}{\frac{5}{6}} \ge 1$

sse $\frac{6}{5} \ge 1$ che è VERA ■

Esercizio 2.8 : se $a < 0 < b < c$, dite quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere:

$$\underbrace{ab < ac}_{i)\ \text{falsa}}, \quad \underbrace{ab \geq ac}_{ii)\ \text{vera}}, \quad \underbrace{ab \leq ac}_{iii)\ \text{falsa}}, \quad \underbrace{ab > 0}_{iv)\ \text{falsa}}.$$

i) per ipotesi $a<0$ e $b<c \Rightarrow ab>ac$
e dunque la i) è falsa $(a=-5, b=1 \text{ e } c=5)$

ii) nel punto i) si è provato $ab>ac$
$\Rightarrow ab \geq ac$ (*)

iii) è falsa: si veda i) $(a=-5, b=1 \text{ e } c=5)$

iv) per ipotesi "$a<0<b$", ovvero $(a=-5 \text{ e } b=1)$
"$a<0$ e $0<b$" $\Rightarrow$ "$a \cdot 0 > ab$"
$\Rightarrow$ "$0 > ab$"
da cui segue che (iv) è falsa ▥

N.B. (*) $A>B \Rightarrow A \geq B$
infatti "$A \geq B$" sse "$A>B$ o $A=B$"

N.B. L'esercizio 2,8 può essere riformulato supponendo
$a<b<0<c$ in un primo caso
$a<b<c<0$ in un secondo caso

Esercizio 2.9 : usando le proprietà delle disuguaglianze (☞ sezione 2.3), provate che se $a \leq b$ e $c \leq d$ allora $a+c \leq b+d$.

TRANSITIVITÀ

$$\left.\begin{array}{l} c \leq d \Rightarrow a+c \leq a+d \\ a \leq b \Rightarrow a+d \leq b+d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c \leq b+d$$

▥

S

Esercizio 2.10 : è vero che se $a \leq b$ e $c \leq d$ allora $ac \leq bd$?

NO: $-7 \leq 1$ e $-4 \leq 3$, ma $(-7)(-4)=28 > 1\cdot 3$

Esercizio 2.16 : è vero che $\left((1+a^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a^2}$? È vero che $\left((1+a)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{1+a}$?

$1+a^2 > 0 \ \forall a$, dunque $(1+a^2)^{2/3} = b$ è un numero ben definito e positivo, come pure è ben definito il numero

$$\left[(1+a^2)^{2/3}\right]^{3/4} = b^{3/4} = (1+a^2)^{1/2}$$

$1+a$ non è detto sia positivo, e quindi è definito $b = (1+a)^{2/3} \geq 0$ come pure è definito $\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/4} = b^{3/4}$

ma non posso scrivere $\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/4} \overset{?}{=} (1+a)^{1/2}$ in quanto, se $a=-2$, il membro a destra non è definito (poiché $\nexists$ radici quadrate dei numeri negativi)

Appendice: radici razionali di un polinomio a coefficienti interi; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Teorema Sia $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = P(x)$ un polinomio a coefficienti interi, cioè $a_i \in \mathbb{Z}$ $i=0\dots n$

Se $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$ con $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, allora p divide a_0
q " a_n

dim

Proviamo che p divide a_0

Se $P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$

con p e q senza divisori comuni, allora

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p \cdot q^{n-1} = -a_0 q^n$ allora

$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n$

Ma p e q non hanno divisori comuni, da cui segue che
p e q^n non " " "

Ne segue che necessariamente p divide a_0

Proviamo che q divide a_n

Da $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$ segue $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$

da cui segue $-a_n p^n = q\left(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$

e, osservando che q e p^n non hanno divisori comuni, si ha che q divide a_n c.v.d.

Oss: Ne segue che le radici razionali - se ne esistono - sono legate ai divisori di a_0 e a_n

Corollario $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dim Per assurdo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, allora esiste $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$, ovvero $x^2 - 2 = 0$. In questa equazione $a_2 = 1$ $a_1 = 0$ $a_0 = -2$ e i divisori di a_2 sono ± 1
" " a_0 " $\pm 1, \pm 2$

e dunque le possibili soluzioni razionali sono $+1, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

e nessuno di questi numeri soddisfa $x^2 - 2 = 0$

Ma questo è assurdo, e quindi segue la Tesi $\lightning$