Logica

Proposizioni e Predicati
Quantificatore Esistenziale ed Universale
Operatori logici e loro Tabelle di verità
(non, e, or, =>, <=>)
Operatori Logici e circuiti elettrici
Modus Ponens e Tollens
Contronominale
Esercizi
Insiemi
Operatori insiemistici (complementazione, intersezione, unione)
Leggi di de Morgan
Esercizi
Operatori logici e insiemistici pp 18
Operatori " " algebrici (*) pp 22
Il paradosso di Russell pp 24 (Appendice)

N.B. (*) è utile in classe perchè permette di verificare agevolmente quando un predicato è vero o falso

P.S.: l'operatore logico "aut" (o questo o quello!) e l'operatore insiemistico Δ sono inclusi solo per completezza, ma non servono in seguito

Proposizione ≡ Una frase di senso compiuto che possa dirsi VERA o FALSA

Esempi

"Che ore sono?" NON È una proposizione

"Napoleone vinse a Waterloo" è una proposizione FALSA

"$3+2=5$" è una proposizione VERA

Oss: in una proposizione compare il predicato necessariamente, ma l'esistenza del predicato in una frase non basta per garantire che questa sia una proposizione infatti:

"Pioverà!" è una proposizione (può essere vera o falsa)

"Pioverà?" non è una proposizione

Dunque l'insieme delle proposizioni matematiche sono un sottoinsieme proprio delle proposizioni della lingua italiana

Predicato ≡ una frase in cui compiono uno o più parametri, che diventa una proposizione - vera o falsa - quando viene specificato il valore dei parametri

Esempio: "$x=y$" $\equiv P(x,y)$ è un predicato (predicato di uguaglianza)

$P(3\times 2, 6)$ è VERA : infatti $3\times 2=6$

$P(5,6)$ è FALSO : " $5 \neq 6$

$\exists$ = "esiste almeno uno" ≡ quantificatore esistenziale

$\forall$ = "qualsiasi sia" = "per ogni" ≡ quantificatore universale

Osservazione: la negazione di $\exists$ è $\forall$ (e viceversa)

"non è vero che $\forall a \in A$, a è pari"

equivale a dire

"$\exists \bar{a} \in A$, $\bar{a}$ non è pari"

Operatori Logici $\underset{Def}{\equiv}$ "non"; "e"; "o"

Per dare un significato a questi operatori sono necessarie le Tabelle di Verità

Equivalenza (logica) $\underset{Def}{\equiv}$ Date due proposizioni a e b, le diciamo (logicamente) equivalenti se assumono lo stesso valore di verità

Tabella di verità di "non" (negazione, a volte indicata con "$\neg$")

a	non a
V	F
F	V

Nota: "non" è un operatore "unario"

"non $(\forall x \in A)$" equivale logicamente a "$\exists \bar{x} \notin A$"

più in generale "non $\forall$" $\equiv$ "$\exists$"

"non $\exists$" $\equiv$ "$\forall$" equivalenza logica

"non (non a)" equivale a "a"

infatti

a	non a	non (non a)
V	F	V
F	V	F

Esempio: la proposizione (vera!)
"Non è vero che $\forall x \in A$, x è maggiore di 1"
diventa
" non $(\forall x \in A, \ x > 1)$ "
diventa
" $\exists x \in A$ tale che $x \leq 1$ "

Tabella di verità di "e" (congiunzione logica, a volte indicata con "$\wedge$")

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Nota: "e" è un operatore binario
$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è vera se sono simultaneamente vere $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$

Esempio: "Oggi piove e fa freddo" diventa
"[Oggi piove] e [oggi fa freddo]"

Tabella di verità di "o" (disgiunzione logica, a volte indicata con "$\vee$")

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Nota: "o" è un operatore binario
"$\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$" è falsa se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sono simultaneamente false

Esempio: "Fai gli esercizi stasera o domani"

equivale a

"[Fai gli esercizi stasera] o [(fai gli esercizi) domani]"

Nota: Si confronti la proposizione precedente con
"Fai gli esercizi stasera e domani"

che equivale a

"[Fai gli esercizi stasera] e [(fai gli esercizi) domani]"

S Teorema

① "A e B" ≡ "non [(non A) o (non B)]"

equivale logicamente

② "A o B" ≡ "non [(non A) e (non B)]"

dim

①

A	B	A e B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

← Confrontando le colonne in blu si ha la Tesi ↓

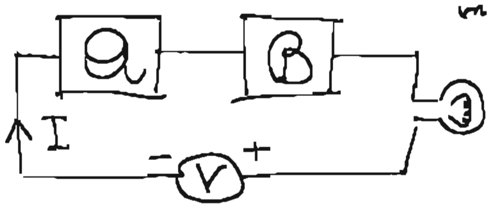
non A	non B	non A o non B	non (non A o non B)
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

La dimostrazione di ② è speculare (basta scambiare "e" con "o"!)

c.v.d.

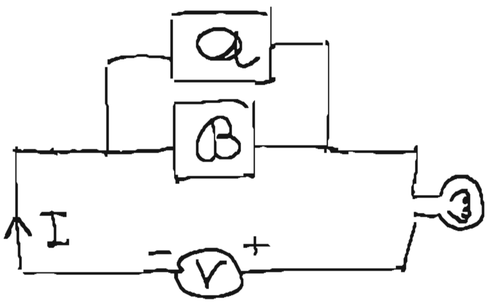
Nota Bene: il risultato precedente è FONDAMENTALE, in quanto permette di ridurre a due gli operatori logici fondamentali. Ovvero i circuiti logici si possono costruire con 2 soli dispositivi

Nota (e): l'operatore "e" è rappresentato dal circuito (1) con due interruttori $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, con la convenzione "interruttore aperto $\equiv$ FALSO
chiuso $\equiv$ VERO"

(1) 

"$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$" è vera quando la lampadina è accesa nel circuito (1) (e devono essere entrambi chiusi affinché si accenda la lampadina!)

Nota (o): l'operatore "o" è rappresentato dal circuito (2) con due interruttori $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ con la convenzione "interruttore aperto $\equiv$ FALSO
chiuso $\equiv$ VERO"

(2) 

"$\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$" è vera quando la lampadina è accesa nel circuito (2) (ed è sufficiente che uno solo dei due sia chiuso!)

Tabella di verità di "$\Rightarrow$"

$\overset{\equiv}{\text{Def}}$

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Oss: "Se passi davanti alla Coop, allora compra il pane" (Prop 1)

Se poniamo $\mathcal{A} \equiv$ passare davanti alla Coop

$\mathcal{B} \equiv$ comprare il pane

allora (Prop 1) diventa $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$

(Prop 1) risulta falsa solo in un caso

antecedente vero $\equiv$ sono passato davanti alla Coop

$\equiv$ $\mathcal{A}$ è vera

conseguente falso $\equiv$ non ho comprato il pane

$\equiv$ $\mathcal{B}$ è falso

Nota: Quando l'antecedente è falso in $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, l'implicazione è sempre vera e quindi non dà informazioni

Oss: "Se passi davanti alla Coop, (importante) allora compra il pane"

equivale a

"non passi davanti alla Coop

o

compri il pane"

ovvero vale il seguente

Teorema: "$a \Rightarrow B$" $\equiv$ "(non a) o B"

equivale

dim

a	B	$a \Rightarrow B$	(non a) o B	non a	B
V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F

e confrontando si ha la tesi c.v.d.

Tabella di verità di "$\Leftrightarrow$" (equivalenza logica)

a	B	$a \Leftrightarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Esercizio (Modus Ponens) Provare che

"$[(a \Rightarrow B) \text{ e } a] \Rightarrow B$" è vera sempre

N.B.: Questo è il sillogismo aristotelico:

(Socrate è un uomo) e (uomo $\Rightarrow$ mortale) $\Rightarrow$ (Socrate mortale) dim.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ e $\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ e $\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V

c.v.d.

S **Esercizio** (Modus Tollens) Provare che

" $[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ e non $\mathcal{B}] \Rightarrow$ non $\mathcal{A}$ " è vera sempre

S **Esercizio** (Contronominale): Provare che

" $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ " $\Longleftrightarrow$ " (non $\mathcal{B}$) $\Rightarrow$ (non $\mathcal{A}$) "

S **Esercizio** provare che

" $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ " equivale a " $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ "

Esercizio: Provare che

" Qualsiasi siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$ " ①

dim. Posto $\mathcal{A} \equiv$ " $a \cdot b = 0$ ", $\mathcal{B} =$ " $a = 0$ ", $\mathcal{C} =$ " $b = 0$ "

la ① equivale a " $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B}$ o $\mathcal{C})$ "

Sfruttando la contronominale

① $\Longleftrightarrow$ ② $\forall a, b \in \mathbb{R}$ non $(\mathcal{B}$ o $\mathcal{C}) \Rightarrow$ non $\mathcal{A}$

$\Longleftrightarrow$ ③ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $[($non $\mathcal{B})$ e $($non $\mathcal{C})] \Rightarrow ($non $\mathcal{A})$

La ③ è certamente vera in quanto

se $(a \neq 0$ e $b \neq 0)$ allora $a \cdot b \neq 0$ c.v.d.

QS **Esercizio:** Scrivete in modo equivalente

"Non è vero che non voglio guardare e voglio comprare"

dim. Posto Q = "voglio guardare" B = "voglio comprare"

la proposizione diventa

① "non ((non Q) e B)" $\Longleftrightarrow$ "Q o (non B)" ②

$\Longleftrightarrow$ "non $Q \Rightarrow$ non B" ③

② "voglio guardare o non voglio comprare"

③ "se non voglio guardare allora non voglio comprare" ∎

QS **Esercizio:** Scrivete in modo equivalente

"Non è vero che: mi piace l'aglio ma (e) non voglio mangiarlo"

dim Posto Q = "mi piace l'aglio" e B = "voglio mangiare l'aglio"

si ha che ① non (Q e (non B)) $\Longleftrightarrow$ ② (non Q) o B

$\Longleftrightarrow$ ③ $Q \Rightarrow B$

② "Non mi piace l'aglio o voglio mangiare l'aglio"

③ "Se mi piace l'aglio allora voglio mangiare l'aglio" c.v.d.

N.B.: se non metto i due punti, la proposizione si può leggere come segue

"(non (non mi piace l'aglio)) e (non voglio mangiarlo)"

Esercizio: Negare la seguente proposizione

"$\forall a>0, \exists b \in \mathbb{R}$ tale che $a>b>0$" ①

dim. Per negare ①, ovvero costruire la proposizione non ①, si procede così

"non ($\forall a>0, \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a>b>0$)" non ①

"$\exists a>0 : \forall b \in \mathbb{R}$ $b \geq a$ o $0 \geq b$" ②

Osserviamo che non ① è palesemente falsa (come pure ② è palesemente falsa, in quanto non ① $\Longleftrightarrow$ ②) c.v.d.

Insiemi

Gli insiemi si possono dare (rappresentare) in due modi

per elencazione: $A=\{2,3,4,5\}$ $B=\{-2,2\}$

per caratteristica: $A=\{x\in\mathbb{N} : 1<x<6\}$ $B=\{x\in\mathbb{R} : x^2=4\}$

$\in$ (appartenenza) : $\underbrace{2\in A}$, $3\notin B$

2 è un elemento dell'insieme A
ovvero
2 appartiene a A

ϕ (insieme vuoto) $\underset{Def}{\equiv}$ è l'insieme che non possiede elementi
ovvero
$\forall x,\ x\notin\phi$

$\subseteq$ (inclusione) $\underset{Def}{\equiv}$ "$\Omega\subseteq\Sigma$" $\Leftrightarrow$ "$\forall x\in\Omega,\ x\in\Sigma$"

$\cap$ (intersezione) $\underset{Def}{\equiv}$ "$\Omega\cap\Sigma \underset{Def}{=} \{x : x\in\Omega \text{ e } x\in\Sigma\}$"

$\cup$ (unione) $\underset{Def}{\equiv}$ "$\Omega\cup\Sigma \underset{Def}{=} \{x : x\in\Omega \text{ o } x\in\Sigma\}$"

Ω^c (complementare di Ω) $\underset{Def}{\equiv}$ "$\Omega^c=\{x : x\notin\Omega\}$"

$\setminus$ (differenza) $\underset{Def}{\equiv}$ $\Omega\setminus\Sigma \underset{Def}{=} \{x : x\in\Omega \text{ e } x\notin\Sigma\}$

Oss: $\Omega\setminus\Sigma = \Omega\setminus(\Sigma\cap\Omega) = \Omega\cap\Sigma^c$

Oss: $(\Omega^c)^c=\Omega$

Oss: $\phi^c = U \underset{Def}{=}$ insieme ambiente (o universo)

Teorema (Leggi di De Morgan) Dati gli insiemi Ω e Σ

$$(\Omega\cap\Sigma)^c = \Omega^c\cup\Sigma^c \quad (i)$$
$$(\Omega\cup\Sigma)^c = \Omega^c\cap\Sigma^c \quad (ii)$$

dim (i) $(\Omega\cap\Sigma)^c = \{x : x\in\Omega \text{ e } x\in\Sigma\}^c$

$= \{x : x\notin\Omega \text{ o } x\notin\Sigma\} = \Omega\cup\Sigma$

Complementare di Omega

Complementare di Sigma

analogamente si prova (ii)

c.v.d.

Dimostrare che $A \equiv B$, dove A e B sono insiemi

Quando si deve provare che due insiemi A e B sono uguali, si procede provando che

i) $A \subseteq B$ ovvero $\forall x \in A,\ x \in B$

ii) $B \subseteq A$ " $\forall x \in B,\ x \in A$

N.B.: l'equivalente algebrico della doppia inclusione è
$x = \sqrt{2}$ sse $(x \leq \sqrt{2})$ e $(x \geq \sqrt{2})$!!

Proviamo ad esempio che $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(i) Provo $\Sigma = (A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C) = \Omega$

Preso $x \in \Sigma$, $x \in A \cap B$ o $x \in C$

① $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C \Rightarrow x \in \Omega$ ✓

② $x \in C \Rightarrow x \in A \cup C$ e $x \in B \cup C \Rightarrow x \in \Omega$ ✓

e la (i) è completamente provata

(ii) Provo $\Sigma = (A \cap B) \cup C \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup C) = \Omega$

Preso $x \in \Omega \Rightarrow x \in (A \cup C)$ e $x \in (B \cup C)$

① $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C = \Sigma$ ✓

② $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C \Rightarrow x \notin \Omega$ e quindi non devo testarlo

③ $x \in B$ e $x \notin A$ e $x \notin C \Rightarrow x \notin \Omega$ e quindi non devo testarlo

④ $x \in A \cap B$ e $x \notin C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in \Sigma$ ✓

Dimostrazione alternativa (sfruttando le equivalenze logiche)

$(A \cap B) \cup C = \{x : x \in C \text{ o } (x \in A \text{ e } x \in B)\}$

(*) $= \{x : (x \in C \text{ o } x \in A) \text{ e } (x \in C \text{ o } x \in B)\}$

$= (A \cap C) \circ (B \cap C)$

unione

unione

(*) Si sfrutta l'equivalenza "(A e B) o C" <=> "(A o C) e (B o C)"
che si prova con le tavole di verità

A	B	C	A e B	(A e B) o C	(A o C) e (B o C)	(A o C)	(B o C)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

$\mathcal{P}(\Omega)$ (insieme delle parti di Ω) $\stackrel{=}{\scriptstyle Def}$ l'insieme dei sottoinsiemi di Ω

ovvero

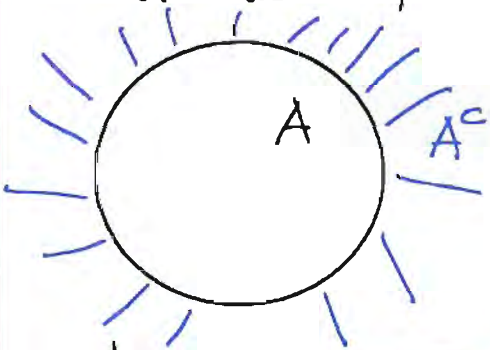
$$\mathcal{P}(\Omega) = \{E : E \subseteq \Omega\}$$

Oss: $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall \Omega$

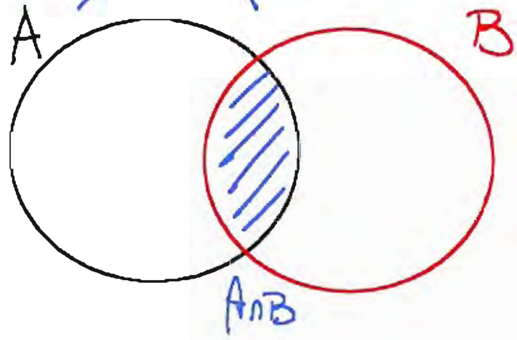
$\Omega \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \forall \Omega$

$\Omega \times \Sigma$ (Prodotto cartesiano) $\stackrel{=}{\scriptstyle Def}$ $\Omega \times \Sigma = \{(x,y) : x \in \Omega \text{ e } y \in \Sigma\}$

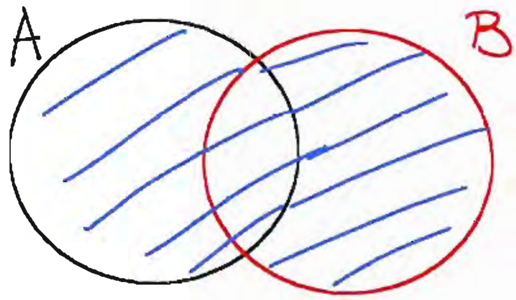
Il prodotto cartesiano è l'insieme delle coppie ordinate (x,y) aventi come primo elemento $x \in \Omega$ e come secondo elemento $y \in \Sigma$; talvolta si scrive $\{x, (x,y)\}$ in modo da evidenziare il primo elemento.



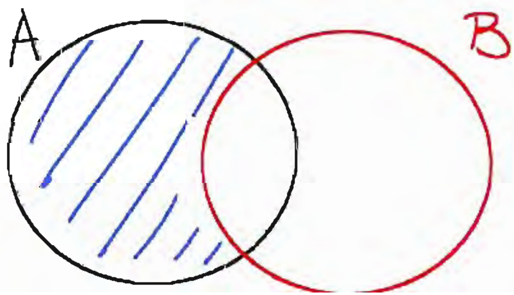
Insieme complementare A^c



$A \cap B$, l'intersezione tra A e B



$A \cup B$, l'unione tra A e B

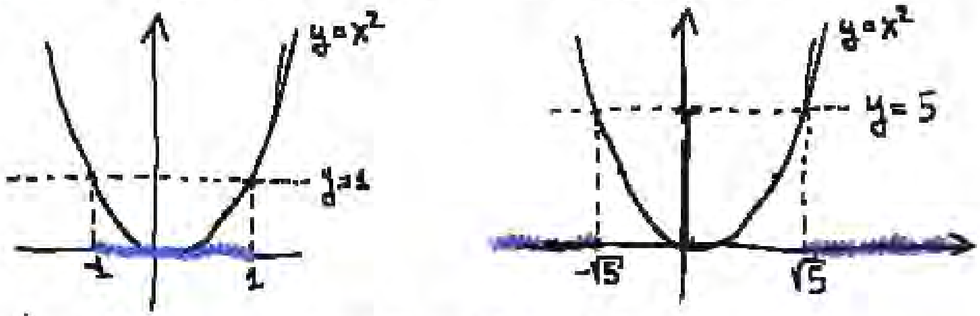


$A \setminus B$, la differenza tra A e B

Esercizi proposti

Esercizio 1.20 : determinate gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 \text{ o } x^2 \geq 5\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 100 \text{ e } (2x - 1 \leq 0 \text{ o } x > 7)\}$.

dim $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 \text{ o } x^2 \geq 5\} = A \cup B$



$A = [-1,1]$ $\qquad B =]-\infty,-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5},+\infty[$

$\Rightarrow E = A \cup B =]-\infty,-\sqrt{5}] \cup [-1,1] \cup [\sqrt{5},+\infty[$

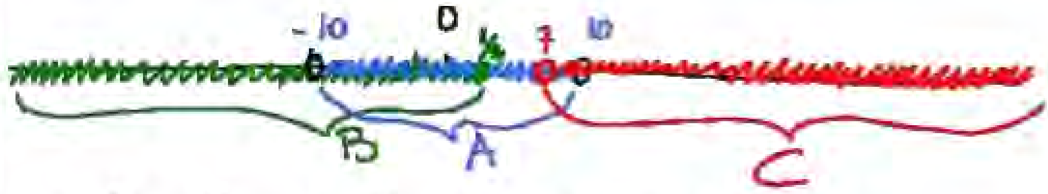
$F = \{x \in \mathbb{R} \ \ x^2 < 100 \text{ e } (2x-1 \leq 0 \text{ o } x > 7)\}$

$= A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 100\} =]-10, 10[$

$B = \{x \in \mathbb{R} : 2x \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1/2\} =]-\infty, 1/2]$

$C = \{x \in \mathbb{R} \ \ 7 < x\} =]7,+\infty[$



$F = (A \cap B) \cup (A \cap C) =]-10, 1/2] \cup]7,10[$ ▥

N.B. Per risolvere adeguatamente l'esercizio converrebbe risolvere le disequazioni, mentre qui facciamo uso del grafico di $y = x^2$

Esercizio 1.21 : dite quali fra le seguenti uguaglianze sono vere:

a) $\{x \in \mathbb{R} : (x > 2 \text{ e } x < 6) \text{ o } x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ e } (x < 6 \text{ o } x < 0)\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : (x < 1 \text{ o } x > 3) \text{ e } x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ o } (x < 1 \text{ e } x > 3)\}$

dim, vediamo la a), che si può scrivere come

$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

dove $A =]2,+\infty[\quad B =]-\infty,6[\quad C =]-\infty,0[$

$(A \cap B) \cup C =]2,6[\cup]-\infty,0[$

$A \cap (B \cup C) =]2,+\infty[\cap (]-\infty,6[) =]2,6[$

dunque la a) è falsa

La b) equivale a

$(]-\infty,1[\cup]3,+\infty[) \cap]-\infty,2] =]-\infty,0[\cup (]-\infty,1[\cap [-3,+\infty[)$

che equivale a

$(]-\infty,1[\cap]-\infty,2]) \cup (]3,+\infty[\cap]-\infty,2]) =]-\infty,0[\cup [-3,1[$

$]-\infty,1[\cup \emptyset =]-\infty,1[$ VERA

Esercizio 1.23 : provate le seguenti formule:

a) $[G \subseteq E] \Longrightarrow \forall F\ E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G$ ← non è da fare!

b) $E \setminus F = E \cap F^c$

c) $[E \setminus F = \emptyset] \Longleftrightarrow [E \subseteq F]$

d) $(E \setminus F) \cap (F \setminus E) = \emptyset$.

b) $E \setminus F = \{x \in \mathbb{R} : x \in E \text{ e } x \notin F\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in E\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \notin F\}$

$= E \cap F^c$

c) $E \setminus F \underset{\uparrow \text{ uso b)}}{=} E \cap F^c = \emptyset \Rightarrow \forall x \in E,\ x \notin F^c$

$\Rightarrow \forall x \in E,\ x \in F$

$\Rightarrow E \subseteq F$

Proviamo il viceversa

$E \subseteq F \underset{\uparrow \text{ uso b)}}{\Rightarrow} E \cap F^c = \emptyset \Rightarrow E \setminus F = E \cap F^c = \emptyset$

d) $(E \setminus F) \cap (F \setminus E) \underset{\uparrow \text{ uso b)}}{=} (E \cap F^c) \cap (F \cap E^c) = (E \cap F^c \cap F) \cap (E \cap F^c \cap E) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

$\cancel{= (E \cap F^c) \cap (F^c \cap E)^c}$ uso deMorgan

$\cancel{= (E \cap F^c) \cap (E \cap F^c)^c = \emptyset}$

in quanto non ci sono elementi in comune tra un insieme ed il suo complementare.

Esercizio 1.24 : determinate $\mathscr{P}(\{a, 1, \bullet\})$.

Esercizio 1.25 : determinate tutti gli elementi di $\{1, x\} \times \{a, 1, \bullet\}$.

Operatori logici e insiemistici

Se si considerano $\Omega \equiv$ universo $= \phi^c$

$\phi \equiv$ insieme vuoto $= \Omega^c$

si ha che

A	A^c
ϕ	Ω
Ω	ϕ

$\mathcal{Q}$	non $\mathcal{Q}$
V	F
F	V

A	B	$A \cap B$
ϕ	ϕ	ϕ
ϕ	Ω	ϕ
Ω	ϕ	ϕ
Ω	Ω	Ω

$\mathcal{Q}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{Q}$ e $\mathcal{B}$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A	B	$A \cup B$
ϕ	ϕ	ϕ
ϕ	Ω	Ω
Ω	ϕ	Ω
Ω	Ω	Ω

$\mathcal{Q}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{Q}$ o $\mathcal{B}$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Ne segue che posso verificare il valore di verità di una proposizione logica trasformandola in un espressione ove compaiono

A^c in luogo di non $\mathcal{Q}$

$\cap$ " " " e

$\cup$ " " " o

ϕ " " " F (falso)

Ω " " " V (vero)

Ne segue che vale

Operatori Logici	Operatori Insiemistici
negazione: non a	complementare: A^c
congiunzione: a e b	intersezione: $A \cap B$
disgiunzione: a o b	unione: $A \cup B$
implicazione: $a \Rightarrow b$	$A^c \cup B \equiv (A \cap B^c)^c \equiv (A \setminus B)^c$
equivalenza: $a \Leftrightarrow b$	$(A \setminus B)^c \cap (B \setminus A)^c = (A \triangle B)^c$
disgiunzione esclusiva: a aut b	differenza simmetrica $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

vedi in seguito la def!

Oss: non (non a) = a $\qquad (A^c)^c = A$

S Esercizio: Provare che (Es 1.8)

"(a e b) o c" $\Leftrightarrow$ "(a o c) e (b o c)" $\quad \forall a, b, c$

"(a o b) e c" $\Leftrightarrow$ (a e c) o (b e c)" $\quad$ "

$$(A \cap B) \cup C \equiv (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad \forall A, B, C$$
$$(A \cup B) \cap C \equiv (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad "$$

Esercizio (leggi di de Morgan)

"non (a e b)" equivale a "(non a) o (non b)"

"non (a o b)" " " "(non a) e (non b)"

$$(A \cap B)^c \equiv A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c \equiv A^c \cap B^c$$

Tabella di verità di "aut"

$\stackrel{\equiv}{\text{Def}}$

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ aut $\mathcal{B}$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Oss: l'operatore "aut" è l'operatore "o esclusivo", ovvero quello che in italiano compare come
"o mangi la minestra o salti la finestra"
in cui la frase è vera sse è vera 1! (una ed una sola) delle due affermazioni (non si può digiunare nella stanza e non si può fare ginnastica quando si sta mangiando!!)

Esercizio: Provare che
"$\mathcal{A}$ aut $\mathcal{B}$" sse "[(non $\mathcal{A}$) e $\mathcal{B}$] o [$\mathcal{A}$ e (non $\mathcal{B}$)]"
(è la traduzione in simboli della precedente osservazione)

S **Esercizio**: Provare che
"$\mathcal{A}$ aut $\mathcal{B}$" sse "($\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$) e [(non $\mathcal{A}$) o (non $\mathcal{B}$)]"

sse "($\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$) e [non ($\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$)]"

sse "non ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$)"

Oss:

$$\begin{aligned}
A \triangle B &\equiv (A\cup B)\cap(A\cap B)^c \equiv \left[(A\cup B)^c \cup (A\cap B)\right]^c \\
&\equiv (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) \\
&\equiv [A\cap(A^c\cup B^c)]\cup[B\cap(A^c\cup B^c)] \\
&\equiv [(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)]\cup[(B\cap A^c)\cup(B\cap B^c)] \\
&\equiv (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c) \\
&\equiv (A\setminus B)\cup(B\setminus A)
\end{aligned}$$

Oss:

$$\text{"}\mathcal{Q} \text{ aut } \mathcal{B}\text{"} \iff \text{"}(\mathcal{Q} \text{ o } \mathcal{B}) \text{ e } [\text{non } (\mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{B})]\text{"}$$

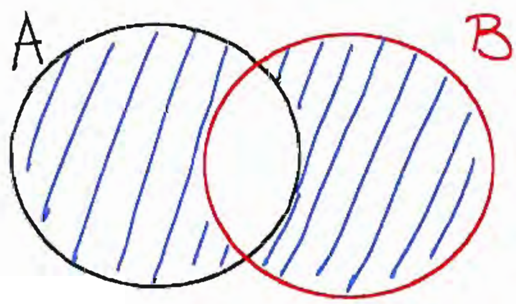
$$\iff \text{"}(\mathcal{Q} \text{ o } \mathcal{B}) \text{ e } [(\text{non } \mathcal{Q}) \text{ o } (\text{non } \mathcal{B})]\text{"}$$

$$\iff \{\mathcal{Q} \text{ e } [(\text{non } \mathcal{Q}) \text{ o } (\text{non } \mathcal{B})]\}$$
$$\text{o } \{\mathcal{B} \text{ e } [(\text{non } \mathcal{Q}) \text{ o } (\text{non } \mathcal{B})]\}$$

$$\iff \{[\mathcal{Q} \text{ e } (\text{non } \mathcal{Q})] \text{ o } [\mathcal{Q} \text{ e } (\text{non } \mathcal{B})]\}$$
$$\text{o } \{[(\text{non } \mathcal{Q}) \text{ e } \mathcal{B}] \text{ o } [\mathcal{B} \text{ e } (\text{non } \mathcal{B})]\}$$

$$\iff [\mathcal{Q} \text{ e } (\text{non } \mathcal{B})] \text{ o } [(\text{non } \mathcal{Q}) \text{ e } \mathcal{B}]$$

$A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \equiv (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \equiv$ differenza simmetrica



$A \triangle B$, la differenza simmetrica tra A e B

Esercizio: Provare che $A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$

dim. per definizione $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

$$= [(A \cap B^c) \cup A^c] \cap [(A \cap B^c) \cup B]$$

$$= [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] \cap [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)]$$

$$= (B^c \cup A^c) \cap (A \cup B)$$

$Z \cap (A \cup A^c) = Z$
$Z \cap (B \cup B^c) = Z$ $\forall Z$!

ma $A \triangle B = (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c)$ per le leggi di de Morgan

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Alternativamente si può provare che

$A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ e $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \triangle B$ ■

Operatori logici e algebra

È possibile verificare il valore di verità di una proposizione per via algebrica, introducendo l'operatore

$$" - " : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

così definito $\quad \overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$

l'operatore

$$" \cdot " : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

così definito $\quad 0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

l'operatore

$$" + " : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

così definito $\quad 0+0=0 \quad 0+1=1+0=1+1=1$

In tal modo un predicato logico si trasforma in una espressione algebrica

$V \equiv$ Vero $\longrightarrow 0$

$F \equiv$ Falso $\longrightarrow 1$

non $Q \longrightarrow \overline{Q}$

e $\longrightarrow \cdot$

o $\longrightarrow +$

Ad esempio il predicato

" non $(Q$ o $B) \equiv ($non $Q)$ e $($non $B)$"

diventa

$$\overline{(Q+B)} \equiv \overline{Q} \cdot \overline{B}$$

e sostituendo tutte le possibili combinazioni di 0 e 1

$$\overline{0+0} = \overline{0} = 1 = 1 \cdot 1 = \overline{0} \cdot \overline{0}$$

$$\overline{0+1} = \overline{1} = 0 = 1 \cdot 0 = \overline{0} \cdot \overline{1}$$

$$\overline{1+0} = \overline{1} = 0 = 0 \cdot 1 = \overline{1} \cdot \overline{0}$$

$$\overline{1+1} = \overline{1} = 0 = 0 \cdot 0 = \overline{1} \cdot \overline{1}$$

Esercizio Per quali valori di verità di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ il predicato $[\mathcal{A} \text{ e } (\text{non } \mathcal{B})] \text{ e } [\mathcal{A} \text{ o } (\text{non } \mathcal{B})]$ è vero?

dim

$$(0\cdot\overline{0})\cdot(0+\overline{0}) = (0\cdot 1)\cdot(0+1) = 0\cdot 1 = 0$$
$$(0\cdot\overline{1})\cdot(0+\overline{1}) = (0\cdot 0)\cdot(0+0) = 0\cdot 0 = 0$$
$$(1\cdot\overline{0})\cdot(1+\overline{0}) = (1\cdot 1)\cdot(1+1) = 1\cdot 1 = 1$$
$$(1\cdot\overline{1})\cdot(1+\overline{1}) = (1\cdot 0)\cdot(1+0) = 0\cdot 1 = 0$$

e dunque il predicato è vero
<u>se</u> $\mathcal{A}$ è vera e $\mathcal{B}$ è falsa c.v.d.

Esercizio: provare che
$\mathcal{A}$ o non $\mathcal{A}$
è sempre vera

dim

$\mathcal{A}=0 \qquad 0+\overline{0} = 0+1 = 1$

$\mathcal{A}=1 \qquad 1+\overline{1} = 1+0 = 1$

e dunque è sempre vera c.v.d.

Esercizio quando il predicato
$[\mathcal{A} \text{ o } (\text{non } \mathcal{B})] \text{ e } [(\text{non } \mathcal{A}) \text{ o } \mathcal{B}]$
è vero?

dim devo considerare i 4 casi $(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$$(0+\overline{0})\cdot(\overline{0}+0) = (0+1)\cdot(1+0) = 1\cdot 1 = 1$$
$$(1+\overline{0})\cdot(\overline{1}+0) = (1+1)\cdot(0+0) = 1\cdot 0 = 0$$
$$(0+\overline{1})\cdot(\overline{0}+1) = (0+0)\cdot(1+1) = 0\cdot 1 = 0$$
$$(1+\overline{1})\cdot(\overline{1}+1) = (1+0)\cdot(0+1) = 1\cdot 1 = 1$$

e scopro che il predicato è vero <u>se</u>
($\mathcal{A}$ falso e $\mathcal{B}$ falso) o ($\mathcal{A}$ vero e $\mathcal{B}$ vero)
ovvero

"$[\mathcal{A} \text{ o } (\text{non } \mathcal{B})] \text{ e } [(\text{non } \mathcal{A}) \text{ o } \mathcal{B}]$" $\Leftrightarrow$ "$A \Leftrightarrow B$" c.v.d.

Il paradosso di Russell

Il paradosso di Russell recita

"Esiste un barbiere che fa la barba a tutti coloro che non si fanno la barba da sè."

Ma il barbiere si fa o no la barba da solo?

- se si fa la barba da solo: FALSO
- se non si fa la barba da solo: FALSO

Un'altra forma è la seguente

"tutti i cretesi sono mentitori. Io sono cretese"

Questa frase è vera o falsa?

L'origine del paradosso di Russell (o del barbiere o del mentitore) nasce da una voluta confusione tra i simboli $\in$ e $\subseteq$

Infatti tutti questi paradossi si possono ricondurre al seguente

$\mathcal{R}$ "Esiste un insieme Ω che contiene tutti gli insiemi che non contengono sè stessi"

Cosa posso dire delle seguenti implicazioni

$\Omega \in \Omega \Rightarrow \mathcal{R}$ è vera? NO!

$\Omega \notin \Omega \Rightarrow \mathcal{R}$ è vera? NO!

Entrambe sono false, il che è paradossale in quanto gli assiomi logici sono

$\forall \mathcal{Q}$ $\mathcal{Q}$ o (non $\mathcal{Q}$) è vera (Principio Terzo escluso)
$\forall \mathcal{Q}$ non ($\mathcal{Q}$ e (non $\mathcal{Q}$)) è vera (Principio non contraddizione)
$\forall \mathcal{Q}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ $[(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{B})$ e $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})] \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{C})$ è vera
(Principio di transitività)

e violerei il principio del 3° escluso

Esistono insiemi che contengono sé stessi come elemento?

- Un insieme di vidimi non è un vidimo
- Un insieme di numeri non è un numero

però

- Un insieme di insiemi è un insieme
(l'insieme $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ = parti di A
è un insieme che ha come elementi degli insiemi)